פונקציות אנליטיות

פונקציה מרוכבת

פונקציה מרוכבת היא פונקציה הלוקחת מספר מרוכב ומחזירה מספר מרוכב

$$f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$$

את הקלט נסמן ב $z=x+iy$ ואת הפלט ב $f(z)=u+iv$

הגדרת הגבול

אנו אומרים כי $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=L$ אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $0<|z-z_0|<\delta$ אז $|f(z)-L|<\varepsilon$

הגדרת רציפות

אנו אומרים כי $f(z)$ רציפה ב z_0 אם ורק אם

לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שאם $|z-z_0|<\delta$ אז $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$

(כלומר $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$)

הגדרת גזירות (במובן המרוכב)

אנו אומרים כי $f(z)$ גזירה ב z_0 אם ורק אם הגבול הבא קיים וסופי

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$$

ואם הוא קיים וסופי נסמן את ערכו ב $f'(z_0)$

משפט לופיטל

אם $f(z),g(z)$ גזירות ב z_0 , $f(z_0)=g(z_0)=0$ ו - $g'(z_0)\neq 0$

אזי $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

הערה : זו גרסה מסויימת של משפט לופיטל עבור פונקציות מרוכבות ואינה זהה למשפט בחדו"א.

ניתן לראות הוכחה לגרסה זו בתרגיל 4 בנושא נגזרות מרוכבות.

תזכורת – נגזרות חלקיות

עבור פונקציה $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ אנו מגדירים

$$u_x^{'}(x_0,y_0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{u(x_0+\triangle x,y_0)-u(x_0,y_0)}{\triangle x}$$

$$u_y^{'}(x_0,y_0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\triangle y)-u(x_0,y_0)}{\triangle y}$$

תזכורת – דיפרנציאביליות (במובן הממשי)

עבור פונקציה $u:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ נאמר כי היא דיפרנציאבילית בנקודה (x_0,y_0)

אם ורק אם הנגזרות החלקיות קיימות בנקודה ו -

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{u(x_0+\triangle x,y_0+\triangle y)-u_x^{'}(x_0,y_0)\triangle x-u_y^{'}(x_0,y_0)\triangle y-u(x_0,y_0)}{\sqrt{(\triangle x)^2+(\triangle y)^2}}=0$$

משפט קושי - רימן

נסמן $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ ו - $z_0=x_0+i\cdot y_0$.

אזי $f(z)$ גזירה בנקודה z_0 אם רק אם מתקיימים שני התנאים הבאים :

1) $u(x,y),v(x,y)$ דיפרנציאביליות (במובן הממשי) בנקודה (x_0,y_0)

2) מתקיימות באותה נקודה משוואות קושי רימן, כלומר

$$\begin{cases}u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)\\ u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0)\end{cases}$$

פונקציה אנליטית בנקודה:

$f(z)$ תקרא אנליטית בנקודה z_0 אם ניתן לפתוח אותה לטור חזקות בסביבת הנקודה, כלומר אם $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ בסביבת z_0.

על טורי חזקות נלמד עוד בהמשך, אך לעתים נתקלים בהגדרה זו בהתחלת הקורס.

בנוסף, $f(z)$ תקרא אנליטית בתחום D אם היא אנליטית בכל נקודה ב D.

פונקציה הולומורפית בנקודה:

$f(z)$ תקרא הולומורפית בנקודה z_0 אם היא גזירה לא רק בנקודה z_0, אלא גם בסביבה כולשהי של z_0. בנוסף, $f(z)$ תקרא הולומורפית בתחום D אם היא גזירה בכל נקודה ב D.

משפט: ההגדרות לעיל שקולות,

כלומר פונקציה היא אנליטית בנקודה אם ורק אם היא הולומורפית בנקודה.

פונקציה אנליטית בתחום D אם ורק אם היא הולומורפית בתחום D.

בהמשך הקורס נחליף בין המושגים אנליטית/הולומורפית באופן חופשי.

הערה: לאור השקילות בהגדרות, לעתים מגדירים פונקציה אנליטית בנקודה בתור פונקציה הגזירה בנקודה ובסביבת הנקודה.

סיכום: אם D תחום (קבוצה פתוחה וקשירה) אז

$f(z)$ אנליטית ב D $\Leftrightarrow$ $f(z)$ הולומורפית ב D $\Leftrightarrow$ $f(z)$ גזירה בכל נקודה ב D

פונקציה הרמונית:

פונקציה $u(x,y):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ תקרא הרמונית בתחום D אם $u_{xx}+u_{yy}=0$ ב - D

משפט: אם $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ אנליטית/הולומורפית בתחום D

אז $u(x,y),v(x,y)$ פונקציות הרמוניות בתחום D והן נקראות הרמוניות צמודות (כי הן מקיימות גם את משוואות קושי – רימן).

פונקציות מרוכבות

שאלות

1) רשמו את הפונקציה $f(z)=z\cdot \mathrm{Re}(z)$ בצורה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

2) רשמו את הפונקציה $f(z)=|z|^2$ בצורה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

3) רשמו את הפונקציה $f(z)=2|z|^2+i(\bar{z})^2$ בצורה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

4) רשמו את הפונקציה $f(z)=\frac{z}{1+|z|^2}$ בצורה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

5) רשמו את הפונקציה $f(z)=z^2+\bar{z}$ בצורה $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$

6) רשמו את הפונקציה $f(x+iy)=\frac{x^3}{3}+i\left(-\frac{y^3}{3}\right)$ בצורה $f(z)$ כאשר $z=x+iy$

תשובות סופיות

1) $f(z)=\underbrace{x^2}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{xy}_{v(x,y)}$

2) $f(z)=\underbrace{x^2+y^2}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{0}_{v(x,y)}$

3) $f(z)=\underbrace{2\left[x^2+xy+y^2\right]}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{\left(x^2-y^2\right)}_{v(x,y)}$

4) $f(z)=\underbrace{\frac{x}{1+x^2+y^2}}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{\frac{y}{1+x^2+y^2}}_{v(x,y)}$

5) $f(z)=\underbrace{x^2+x-y^2}_{u(x,y)}+i\cdot\underbrace{(2xy-y)}_{v(x,y)}$

6) $f(z)=\frac{z^3+3z\left(\bar{z}\right)^2}{12}$

גבולות מרוכבים ורציפות

שאלות

מצאו את הגבולות הבאים (אם קיימים):

1) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\bar{z}}{z}$

2) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{z^4}{|z|^4}$

3) $\lim\limits_{z\to 0} \frac{\operatorname{Re}(z)+\operatorname{Im}(z)}{|z|}$

4) הראו כי הגבול $\lim\limits_{z\to 0} e^{\frac{-1}{z^4}}$ אינו קיים.

תשובות סופיות

5) הגבול לא קיים

6) הגבול לא קיים

7) הגבול לא קיים

8) הוכחה

נגזרות מרוכבות

שאלות

מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציות הבאות גזירות:

1) $f(z)=\overline{z}$

2) $f(z)=\mathrm{Re}(z)$

3) $f(z)=|z|^2$

4) נניח כי $f(z),g(z)$ גזירות ב z_0 , $f(z_0)=g(z_0)=0$ ו - $g'(z_0)\neq 0$

הוכיחו כי $\lim\limits_{z\to z_0}\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{f'(z_0)}{g'(z_0)}$

הערה: זו גרסה מסויימת של משפט לופיטל עבור פונקציות מרוכבות ואינה זהה למשפט בחדו"א.

תשובות סופיות

1) הפונקציה אינה גזירה באף נקודה במישור המרוכב
2) הפונקציה אינה גזירה באף נקודה במישור המרוכב
3) הפונקציה גזירה אך ורק ב $z=0$
4) הוכחה

משוואות קושי - רימן

שאלות

1) הראו כי $f(z)=z^2+\mathrm{Im}(z)$ אינה גזירה לכל z.

2) הראו כי $f(z)=xy+i\left(x^2+y^2\right)$ אינה גזירה בכל הנקודות בהן $z\neq 0$

3) מצאו מספרים ממשיים a,b כך שהפונקציה
$f(z)=e^{ax}\cos(3y)+i\left(-e^{-3x}\sin(\mathrm{b}\,y)\right)$ תהיה גזירה בכל נקודה.

4) נתון כי $f(z)=\frac{\bar{z}}{z}$ אינה רציפה ב- $z=0$.
מצאו את כל הנקודות (אם קיימות) בהן הפונקציה גזירה.

5) נניח כי $f(z)$ גזירה בתחום D, ונניח כי $\mathrm{Re}\{f(z)\}=0$ לכל $z\in D$.
הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

6) נניח כי $f(z)$ פונקציה גזירה שאינה קבועה בתחום D. נגדיר $g(z)=\overline{f(z)}$ לכל $z\in D$. הוכיחו כי $g(z)$ אינה גזירה בכל D.

7) נתונה הפונקציה $f(z)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}} & z\neq 0 \\ 0 & z=0 \end{cases}$ הוכיחו את הטענות הבאות:
א. הפונקציה אינה רציפה בראשית.
ב. משוואות קושי-רימן מתקיימות בראשית.

8) נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום $H^+=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)>0\}$.
הוכיחו כי $g(z)=\overline{f(\bar{z})}$ אנליטית בתחום $H^-=\{z\in\mathbb{C}\mid \mathrm{Im}(z)<0\}$

9) הוכיחו כי $f(z)=e^{\mathrm{Re}(z)}$ אינה גזירה בשום נקודה במישור המרוכב

10) נתונה הפונקציה $f(z)=cx^2-xy+ixy^2$ כאשר C קבוע מרוכב כלשהוא נתון כי $f(z)$ גזירה בנקודה $1+i$. מצאו את הקבוע C ואת כל הנקודות בהן הפונקציה גזירה.

11) נתונה הפונקציה $f(z)=\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+i\cdot\arctan(\frac{y}{x})$.
קבעו האם הפונקציה $f(z)$ אנליטית בחצי המישור הימני $H=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$.

12) נתונה הפונקציה $f(z)=e^{\frac{x^2-y^2}{2}}\left[\cos(xy)+i\cdot a\sin(xy)\right]$.
עבור אילו ערכי a זוהי פונקציה הולומורפית (אנליטית) בכל המישור?

13) (טענה חשובה)
אם $g(z)$ אנליטית בתחום D ו - $|g(z)|$ קבועה אז גם $g(z)$ קבועה.

14) נניח כי $R>0$ ונתונה $f:D(0,R)\to\mathbb{C}$ גזירה.
נגדיר $g(z)=\overline{f\left(\frac{R}{\bar{z}}\right)}$. מצאו תחום בו $g(z)$ מוגדרת ובדקו אם היא גזירה שם.

תשובות סופיות

1) הוכחה
2) הוכחה
3) $a=-3,b=3$
4) הפונקציה אינה גזירה בכל המישור המרוכב
5) הוכחה
6) הוכחה
7) הוכחה
8) הוכחה
9) הוכחה
10) $c=\frac{3}{2}$ והנקודות הן $z=0,1,\frac{1}{4}+\frac{1}{2}i$
11) כן
12) $a=1$
13) הוכחה
14) התחום בו $g(z)$ מוגדרת (וגם גזירה) הוא $|z|>1$

פונקציות הרמוניות

שאלות

1) הראו כי הפונקציה x^3-3xy^2 היא פונקציה הרמונית בכל המישור.

2) הראו כי הפונקציה x^2-y^2 היא פונקציה הרמונית בכל המישור ומצאו לה צמודה הרמונית.

3) הראו כי הפונקציה $f(z)=xy+i(x^2+y^2)$ היא פונקציה גזירה בראשית הצירים אך החלק המדומה שלה אינו פונקציה הרמונית.
האם $f(z)$ הולומורפית בראשית?

4) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\sin(x)\cosh(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה $v(x,y)$ המקיימת $v(0,0)=2$
רמז: $f(z)=\sin(z)$.

5) הראו כי הפונקציה $u(x,y)=\cos(x)\sinh(\mathrm{y})$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור ומצאו פונקציה הלומורפית כך שמתקיים $u(x,y)=\mathrm{Re}\{f\}$.

6) הראו כי הפונקציה $v(x,y)=e^y\sin(x)$ היא פונקציה הרמונית במישור, מצאו לה פונקציה צמודה הרמונית $u(x,y)$ ופונקציה שלמה $f(z)$ כך שמתקיים $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$.

7) הראו כי הפונקציה $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
רמז: $u(r,\theta)$ תקרא הרמונית אם היא מקיימת $r^2u_{rr}^{''}+ru_r^{'}+u_{\theta\theta}^{''}=0$.

8) נתון כי $u(r,\theta)=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos(\theta)$ היא פונקציה הרמונית בתחום $r\neq 0$.
מצאו לה צמודה הרמונית בתחום זה.

9) הוכיחו כי $u(x,y)=2x-x^3+3xy^2$ היא פונקציה הרמונית ומצאו לה צמודה הרמונית.

10) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=u(x,y)^2-v(x,y)^2$ פונקציה הרמונית.

11) תהי $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ פונקציה שלמה.
הוכיחו כי $g(x,y)=\sin\left[u(x,y)\right]\cdot\cosh\left[v(x,y)\right]$ פונקציה הרמונית.

12) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)? אם כן, מצאו אותן.

13) האם קיימות פונקציות הרמוניות מהצורה $u(x,y)=\varphi\left(\frac{x}{y}\right)$
(כאשר $\varphi\in C^2$ פונקציה לא ידועה)? אם כן, מצאו אותן.

14) הראו כי הפונקציה $\sinh(x)\cos(y)$ היא פונקציה הרמונית בכל המישור,
ומצאו את הצמודה ההרמונית שלה.

תשובות סופיות

1) הוכחה
2) הצמודה ההרמונית היא $2xy$
3) הפונקציה $f(z)$ אינה הולומורפית/אנליטית בראשית
4) הצמודה ההרמונית היא $\cos(x)\sinh(y)+2$
5) $f(z)=-i\cdot\sin(z)$
6) $u(x,y)=-e^{y}\cos(x)$, $f(z)=-e^{-i\cdot z}$
7) הוכחה
8) הצמודה ההרמונית היא $\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin(\theta)$
9) $v(x,y)=2y-3x^{2}y+y^{3}$
10) הוכחה
11) הוכחה
12) $u(x,y)=-\frac{c_1}{\left(\frac{x^2+y^2}{x}\right)}+c_2$
13) $u(x,y)=c_1\arctan\left(\frac{y}{x}\right)+c_2$
14) $v(x,y)=\cosh(x)\sin(y)$