פונקציות אלמנטריות

זהות אוילר:

$e^{i\theta}=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$ לכל θ ממשי

שימו לב כי לכל θ ממשי מתקיים $\left|e^{i\theta}\right|=1$.

אקספוננט מרוכב

לכל $z=x+iy$ נגדיר את האקפוננט המרוכב באופן הבא

$$e^{z}=e^{x}e^{iy}$$

$$e^{z}=e^{x}\cos(y)+ie^{x}\sin(y)$$

הבדלים חשובים בין האקספוננט המרוכב לאקספוננט הממשי

1) אקספוננט מרוכב יכול להיות מספר ממשי שלילי, למשל $e^{i\pi}=-1$

2) בעוד $e^{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ חח״ע, האקספוננט המרוכב $e^{z}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ **לא חח״ע**.

סינוס מרוכב

לכל $z=x+iy$ נגדיר את הסינוס המרוכב באופן הבא

$$\sin(z)=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

שימו לב להבדל מאוד חשוב בין הסינוס המרוכב לסינוס הממשי:

בעוד $\sin(x)$ חסומה, הפונקציה $\sin(z)$ **לא חסומה**.

קוסינוס מרוכב

לכל $z=x+iy$ נגדיר את הקוסינוס המרוכב באופן הבא

$$\cos(z)=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

שימו לב להבדל מאוד חשוב בין הקוסינוס המרוכב לקוסינוס הממשי:

בעוד $\cos(x)$ חסומה, הפונקציה $\cos(z)$ **לא חסומה**.

<u>פונקציית הארגומנט הרב-ערכית</u>

לכל $z\neq 0$ נסמן ב $\arg(z)$ את **קבוצת** כל הזוויות המתאימות ל z

למשל, $\arg(1)=\{0,2\pi,-2\pi,4\pi,-4\pi,...\}$

<u>פונקציית הלוג הרב-ערכית</u>

לכל $z\neq 0$ נסמן ב $\log(z)$ את **הקבוצה** הבאה

$$\log(z)=\ln|z|+i\cdot\arg(z)$$

למשל,

$$\begin{aligned}\log(i)&=\ln(1)+i\cdot\arg(i)\\&=0+i\cdot\arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)\\&=i\cdot\left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\\&=\left\{i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\mid k\in\mathbb{Z}\right\}\end{aligned}$$

הערה:

כל הלוגריתמים אצלנו בקורס יהיו בבסיס e, גם $\log(z)$ הוא בבסיס e.

נהוג לסמן $\ln(\ )$ כאשר הכוונה לפונקציית הלוגריתם הממשית

ו - $\log(z)$ כאשר הכוונה לפונקציית הלוגריתם המרוכבת.

<u>פונקציית החזקה הרב-ערכית</u>

לכל $z\neq 0$ ו - $w\in\mathbb{C}$ נסמן ב z^w את **הקבוצה** הבאה

$$z^w=e^{w\log(z)}$$

כאשר כאן $\log(z)$ זו פונקציית הלוגריתם הרב ערכית.

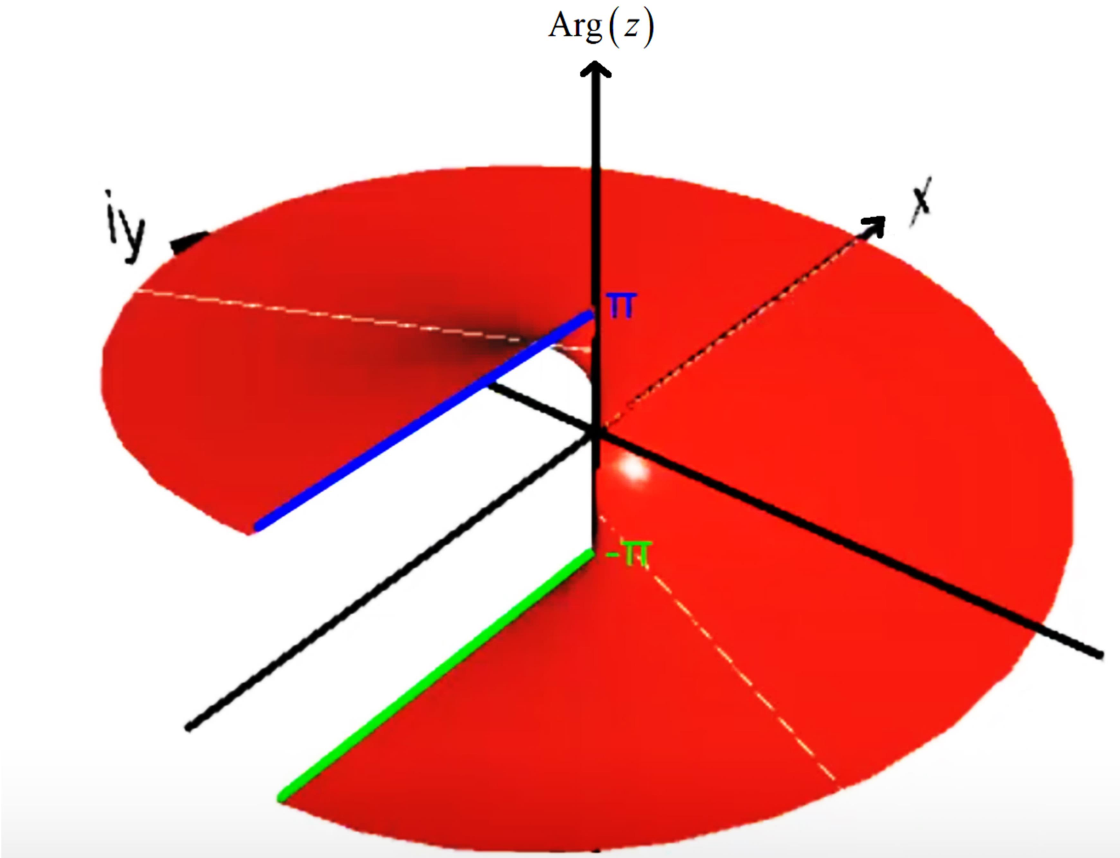
<u>הענף הראשי של הארגומנט</u>

לכל $z \neq 0$ נסמן ב $\text{Arg}(z)$ את **הזווית** המתאימה בתחום $(-\pi,\pi]$

למשל, $\text{Arg}(1)=0$

הפונקציה $\text{Arg}(z)$ נקראת הענף הראשי של פונקציית הארגומנט.

נוכל לשרטט אותה באופן הבא כאשר הציר האנכי הוא $\text{Arg}(z)$:



הערה:

ניתן לראות כי פונקציה זו אינה רציפה על גבי החצי השלילי של הציר הממשי,

כלומר ב - $(-\infty,0]=\{z=x \mid x\leq 0\}$

ענף אנליטי של הלוג - הגדרה

$f(z)$ תקרא ענף אנליטי של הלוג בתחום D אם ורק אם מתקיימים שני התנאים:

א) הפונקציה $f(z)$ אנליטית בתחום D

ב) מתקיים $e^{f(z)}=z$ לכל $z\in D$

הענף הראשי של הלוג

לכל $z\neq 0$ נגדיר את הפונקציה

$$\mathrm{Log}(z)=\ln|z|+i\cdot\mathrm{Arg}(z)$$

למשל,

$$\mathrm{Log}(1)=\ln|1|+i\cdot\mathrm{Arg}(1)=0$$

הפונקציה $\mathrm{Log}(z)$ נקראת הענף הראשי של הלוג.

הערות:

1) אנו מסמנים פונקציה זו עם L (גדולה).

2) הענף הראשי של הלוג אנליטי בכל המישור המרוכב פרט לחצי השלילי של הציר הממשי (כולל אפס), כלומר בתחום $D=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

נדגיש כי על הציר הממשי השלילי (ובאפס) הענף הראשי של הלוג אינו אנליטי.

ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ - הגדרה

$f\left(z\right)$ תקרא ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ בתחום D אם ורק אם מתקיימים שני התנאים :

א) הפונקציה $f\left(z\right)$ אנליטית בתחום D

ב) מתקיים $f^{n}\left(z\right)=z$ לכל $z\in D$

הענף הראשי של פונקציית השורש

לכל $z\neq 0$ נגדיר את הפונקציה

$$\sqrt{z}=e^{\frac{1}{2}Log\left(z\right)}$$

הפונקציה הזאת נקראת הענף הראשי של פונקציית השורש (מסדר 2)

והיא אנליטית בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\left(-\infty,0\right]$

נדגיש כי היא אינה אנליטית על הציר הממשי השלילי (ובאפס).

אקספוננט מרוכב

שאלות

1) פתרו את המשוואה $e^z = -1$.
2) הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $\left|e^{ix}\right| = 1$
3) א) הראו כי אם $\operatorname{Im}(z) \ge 0$ אז $\left|e^{iz}\right| \le 1$
ב) הראו כי $\left|e^{iz}\right| = 1$ אם ורק אם $\operatorname{Re}(z) = 0$
4) פתרו את המשוואה $e^z = 1$.
5) פתרו את המשוואה $e^z = i$.
6) פתרו את המשוואה $e^z = 1 + i$.
7) בחדו״א למדנו כי $f(x) = e^x$ חח״ע. האם $f(z) = e^z$ גם חח״ע?

תשובות סופיות

1) $z = i \cdot \pi[2n+1]$ כאשר n שלם
2) הוכחה
3) א) הוכחה ב) הוכחה
4) $z = 2\pi ik$ כאשר k שלם
5) $z = i\pi\left(2k + \frac{1}{2}\right)$ כאשר k שלם
6) $z = \frac{1}{2}\ln(2) + i\pi\left(2k + \frac{1}{4}\right)$ כאשר k שלם
7) לא.

סינוס מרוכב

שאלות

1) פתרו את המשוואה $\sin(z)=2$.

2) הוכיחו כי $\sin(z)=\sin(x)\cosh(y)+i\cos(x)\sinh(y)$.

3) פתרו את המשוואה $\sin(z)=5$.

תשובות סופיות

1) $z_n=\frac{\pi}{2}+2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$, כאשר n מספר שלם.

2) הוכחה

3) $z_k=\frac{\pi}{2}+2\pi k-i\ln\left(5\pm2\sqrt{6}\right)$, כאשר k מספר שלם.

קוסינוס מרוכב

שאלות

1) הוכיחו כי $\cos(z)=\cos(x+iy)=\cos(x)\cosh(y)-i\sin(x)\sinh(y)$.

2) פתרו את המשוואה $\cos(z)=2$.

3) בחדו"א למדנו כי $|\cos(x)|\le 1$ לכל x. האם $|\cos(z)|\le 1$ לכל z?

4) פתרו את המשוואה $\cos(\pi z)+\frac{3}{4}i=0$.

5) הוכיחו כי לכל z מתקיים $|\cos(z)|\le \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ כאשר $y=\operatorname{Im}(z)$

6) פתרו את המשוואה $\tan(z)=\frac{i}{3}$.

תשובות סופיות

1) הוכחה.

2) $z_n=2\pi n+i\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)$ כאשר n מספר שלם.

3) לא.

4) $z_k=2k\pm\left(\frac{1}{2}+i\frac{1}{\pi}\ln(2)\right)$ כאשר k מספר שלם.

5) הוכחה

6) $z_k=\pi k+i\frac{1}{2}\ln(2)$ כאשר k מספר שלם.

GOOL
בשביל התירגול

העתקות אלמנטריות

שאלות

1) נתונה $f(z)=z+1$ ו- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
מצאו את $f[U]$ (תמונת התחום U תחת ההעתקה $f(z)$)

2) נתונה $f(z)=5z$ ו- $U=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$,
מצאו את $f[U]$ (תמונת התחום U תחת ההעתקה $f(z)$)

3) נתונה $f(z)=z^3$ ו- $U=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Arg}(z)=\frac{\pi}{4}\right\}$,
מצאו את $f[U]$ (תמונת התחום U תחת ההעתקה $f(z)$)

4) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<\pi\}$
תחת ההעתקה $f(z)=e^z$?

5) מהי תמונת התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(z)<2\pi\}$
תחת ההעתקה $f(z)=e^z$?

6) מהי תמונת התחום $A=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,-\infty<\mathrm{Re}(z)<0, 0<\mathrm{Im}(z)<\frac{\pi}{2}\right\}$
תחת ההעתקה $f(z)=e^z$?

תשובות סופיות

1) $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid |w-1| < 1 \right\}$

2) $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid |w| < 5 \right\}$

3) $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Arg}(w) = \frac{3\pi}{4} \right\}$

4) $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im}(w) > 0 \right\}$

5) $\mathbb{C} \setminus [0,\infty)$

6) $\left\{ w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(w) > 0 \ , \ \operatorname{Im}(w) > 0 \ , \ |w| < 1 \right\}$

לוגריתם מרוכב, פונקציות רב-ערכיות ושורשים

שאלות

1) א) חשבו את $\mathrm{Arg}(1+i)$

ב) חשבו את $\mathrm{Arg}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

2) א) חשבו את $\mathrm{Log}(1+i)$

ב) חשבו את $\mathrm{Log}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)$

3) מצאו את כול הערכים האפשריים של $\sqrt{i}$

4) מצאו את כול הערכים האפשריים של i^i

5) מצאו את כול הערכים האפשריים של $2^{\frac{1}{9}+\frac{i}{50}}$

6) חשבו את הערך $(2+2i)^{5i}$ עבור 3 ענפים שונים לבחירתכם.

כמה תשובות אפשריות יש לערך זה?

7) מצאו את תמונת התחום $A=\left\{z=re^{i\theta} \mid R_1<r<R_2, -\pi<\theta<\pi\right\}$

תחת ההעתקה $Log(z)$ (הענף הראשי של הלוג) $(0<R_1<R_2)$

8) מצאו תחום בו הפונקציה $Log\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$ אנליטית כאשר $a,b\in\mathbb{C}$ שונים

הערה: תרגיל זה רלוונטי למי שלמד העתקות מוביוס

9) הראו כי $\left|a^z\right| = a^{\mathrm{Re}(z)}$ עבור a ממשי חיובי, בתחום $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$

כאשר פונקציית החזקה מוגדרת ע"י הענף הראשי של הלוג, כלומר $a^z = e^{z\cdot Log(a)}$

10) הראו ישירות כי ההעתקה $\sqrt{z}$ אינה רציפה ב $\mathbb{C}$

אם מגדירים את $\sqrt{z}$ באופן הבא: $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$ עבור $\theta \in [0,2\pi)$

11) מצאו את כול הערכים האפשריים של $\log(\log(-1))$

12) נניח כי $\log(z)$ זה ענף רציף של הלוגריתם בתחום

$$\mathbb{C}\setminus\left\{z = x+iy \mid x \ge 0 \ , \ y = \sin(x)\right\}$$

ונניח כי בענף זה מתקיים $\log(1) = 0$. חשבו את הערכים הבאים:

$$\log(-1),\log(i),\log(-i),\log\left(\frac{5\pi}{2}\right),\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)$$

13) נגדיר $\log_a(z) = \ln|z| + i\cdot\arg(z)$ כאשר $\alpha - 2\pi < \arg(z) \le \alpha$

א) חשבו את הערכים $\log_1(1)$, $\log_\pi(1)$ ו - $\log_{2\pi}(1)$

ב) מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $\log_\pi(z)$

ג) מצאו את התמונה של $\mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ תחת ההעתקה $\log_0(z)$

14) יהיו $z_1,\dots,z_n$ מספרים מרוכבים כך ש $\mathrm{Re}(z_k) > 0$ לכל $1 \le k \le n$

וגם $\mathrm{Re}(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_k) > 0$ לכל $1 \le k \le n$

הוכיחו כי $Log(z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_n) = Log(z_1)+\ldots+Log(z_n)$

כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג

15) יהי $U=\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$ ויהי $y>0$ לכל $1\le k\le n$

חשבו את הגבול $\lim\limits_{y\to 0}\left[Log(a+iy)-Log(a-iy)\right]$ עבור $a>0$ ו - $a<0$

כאשר $Log(z)$ זה הענף הראשי של הלוג

16) הוכיחו כי לא קיים ענף אנליטי של $\sqrt{z}$ ב $\mathbb{C}$

כלומר הראו כי לא קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ ב $\mathbb{C}$

כך ש $h^2(z)=z$ לכל $z\in\mathbb{C}$

17) הוכיחו כי לא קיים ענף אנליטי של $\sqrt[n]{z}$ ב $|z|<1$ לכל $n\ge 2$

18) נניח כי $f(z),g(z)$ שני ענפים אנליטיים של הלוג בקבוצה פתוחה וקשירה U

הוכיחו כי קיים קבוע k שלם כך ש $f(z)-g(z)=2\pi ik$ לכל $z\in U$

תשובות סופיות

1) א) $\operatorname{Arg}(1+i)=\frac{\pi}{4}$ ב) $\operatorname{Arg}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)=-\frac{\pi}{2}$

2) א) $\operatorname{Log}(1+i)=\ln\left(\sqrt{2}\right)+i\frac{\pi}{4}$ ב) $\operatorname{Log}\left(2e^{i\frac{3\pi}{2}}\right)=\ln(2)-i\frac{\pi}{2}$

3) $\left\{e^{i\frac{\pi}{4}},e^{i\frac{5\pi}{4}}\right\}$

4) $\left\{e^{-\pi\frac{4k+1}{2}}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

5) $\left\{2^{\frac{1}{9}}e^{-\frac{2\pi k}{50}}e^{i\left(\frac{\ln(2)}{50}+\frac{2\pi k}{9}\right)}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$

6) יש אינסוף ערכים אפשריים והם $\left\{e^{-5\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}e^{i5\ln\left(\sqrt{8}\right)}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$,

7) תמונת התחום היא המלבן $\{w=u+iv\mid\ln(R_1)<u<\ln(R_2),-\pi<v<\pi\}$

8) $\mathbb{C}\setminus[a,b]$ כאשר $[a,b]$ זה הקו הישר בין a ו - b

9) הוכחה

10) הוכחה

11) $\left\{\ln(\pi+2\pi k)+i\left(\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\mid k\geq 0,m\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{\ln(-\pi-2\pi k)+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi m\right)\mid k\leq -1,m\in\mathbb{Z}\right\}$

12)

$$\log(-1)=-i\pi$$

$$\log(i)=-i\frac{3\pi}{2}$$

$$\log(-i)=-i\frac{\pi}{2}$$

$$\log\left(\frac{5\pi}{2}\right)=\ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)$$

$$\log\left(\frac{3\pi}{2}\right)=\ln\left(\frac{5\pi}{2}\right)-2\pi i$$

13) א) $\log_0(1)=0$

$\log_{2\pi}(1)=2\pi i$

$\log_{\pi}(1)=0$

ב) תמונת התחום היא הרצועה $\{w\in\mathbb{C}\,|\,-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi\}$

ג) תמונת התחום היא הרצועה $\{w\in\mathbb{C}\,|\,0<\mathrm{Im}(w)<2\pi\}$

14) הוכחה

15) $$\lim_{y\to 0}\left[Log(a+iy)-Log(a-iy)\right]=\begin{cases}0 & a>0\\ 2\pi i & a<0\end{cases}$$

16) הוכחה

17) הוכחה

18) הוכחה