עקרון הארגומנט

משפט (עקרון הארגומנט):

נניח כי γ מסילה פשוטה, סגורה וחלקה למקוטעין ונניח כי $f(z)$ אנליטית שאינה מתאפסת על γ ונניח כי היא אנליטית בתחום הפנימי D פרט למספר סופי של קטבים $z_1,...,z_N \in D$. אזי

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P$$

N זה מספר האפסים (כולל ריבוי) של $f(z)$ בתוך D

P זה מספר הקטבים (כולל ריבוי) של $f(z)$ בתוך D

המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט:

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}dz = N-P = \frac{1}{2\pi}\triangle\arg_{\gamma} f(z)$$

כאשר $\triangle\arg_{\gamma} f(z)$ זה השינוי של הארגומנט של $f(z)$ לאורך המסילה γ.

המשמעות הגיאומטרית של הביטוי $\frac{1}{2\pi}\triangle\arg_{\gamma} f(z)$ זה מספר ההקפות שמבצעת המסילה $f[\gamma]$ ביחס לראשית.

משפט רושה:

נניח כי γ מסילה פשוטה, סגורה וחלקה למקוטעין ונניח כי $f(z),g(z)$ אנליטיות על γ ובתחום הפנימי D נניח בנוסף כי לכל $z\in\gamma$ מתקיים $|g(z)|<|f(z)|$.

אזי מספר האפסים של f בתחום D (כולל ריבוי) שווה למספר האפסים של $f+g$ בתחום D (כולל ריבוי)

הערות:

1. אם תנאי משפט רושה מתקיימים אז זה גורר כי f אינה מתאפסת על γ
2. אם תנאי משפט רושה מתקיימים אז זה גורר כי $f+g$ אינה מתאפסת על γ

טיפים בבחירת $f(z),g(z)$:

1. נרצה לבחור $f(z)$ פשוטה יחסית, במובן שיהיה קל למצוא את האפסים שלה.
2. אין טעם לבחור $f(z)$ המתאפסת על המסילה, כי אז התנאי $|g(z)|<|f(z)| \quad \forall z\in\gamma$ בטוח לא יתקיים (ולכן לא נוכל להשתמש במשפט רושה)

<u>הגדרה – קיום לוגריתם אנליטי</u> $\log f(z)$**:**

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח $f(z)$ הולומורפית בתחום D. נאמר כי יש לה לוגריתם אנליטי בתחום D אם קיימת פונקציה אנליטית $h(z)$ כך ש $f(z)=e^{h(z)}$ $\forall z\in D$ (ונסמן $h(z)=\log f(z)$)

<u>הערות:</u>

1. אם $f(z)$ מתאפסת בתחום D אז אין לה לוגריתם אנליטי שם.
   כי אם קיים $z_0\in D$ כך ש $f(z_0)=0$ אז לא ייתכן כי $0=f(z_0)=e^{h(z_0)}$.

2. אם $f(z)$ אינה הולומורפית בתחום D אז אין לה לוגריתם אנליטי שם.

<u>משפט על קיום לוגריתם אנליטי:</u>

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

תהי $f(z)$ הולומורפית שאינה מתאפסת בתחום D.

אזי יש לה לוגריתם אנליטי בתחום D אם ורק אם $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz=0$ לכל מסלול סגור וחלק למקוטעין $\gamma\subset D$.

הערה: אם $f(z)$ הולומורפית שאינה מתאפסת בתחום **פשוט-קשר** D אזי יש לה לוגריתם אנליטי בתחום D.

<u>משפט הורוויץ:</u>

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח כי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות בתחום D המתכנסת במ"ש ל $f(z)$ על כל קבוצה קומפקטית המוכלת ב D. נניח כי $f(z)$ מתאפסת ב z_0 מסדר m.

אז לכל $r>0$ קטן מספיק קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ לפונקציה $f_n(z)$ יש בדיוק m אפסים (כולל ריבוי) בדיסק $|z-z_0|<r$

עקרון הארגומנט

שאלות

חשבון את האינטגרלים הבאים על ידי שימוש בעקרון הארגומנט:

1) $\int\limits_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1}dz$

2) $\int\limits_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$ כאשר $f(z)=\frac{(z+3)(z+1)}{z^2}$

3) $\int\limits_{|z|=1} \frac{\sin(2z)}{\sin^2(z)-0.5}dz$

4) א) מצאו את הקטבים והאפסים של $f(z)=\frac{(z-2)^2}{(e^{2z}-1)^2 z^3}$ בתחום $|z|<4$

ב) חשבו את האינטגרל $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=4} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$

5) א) מצאו את הקטבים והאפסים של $f(z)=\frac{\cos(z)}{\sin(z)(1-\cos(z))^2}$ בתחום $\mathbb{C}$

ב) חשבו את האינטגרל $I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)}dz$

6) (אתגר)

נתבונן במסילה $\gamma:[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ המוגדרת על ידי

$$\gamma(t)=\frac{\left[\cos(2t)-\cos(t)+i(\sin(2t)-\sin(t))+\frac{1}{4}\right]e^{\frac{\cos(t)-2-i\sin(t)}{5-4\cos(t)}}}{\sin(\cos(t)+i\sin(t))-i\sin(t)-\cos(t)}$$

כמה פעמים היא מקיפה את הראשית? (נגד כיוון השעון)

הערה: מספר הפעמים שמסילה סגורה (לאו דווקא פשוטה) מקיפה את z_0

נתון ע"י $\eta(\gamma,z_0)=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\gamma}\frac{1}{z-z_0}dz$

תשובות סופיות

1) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{2z}{z^2+1} dz = 4\pi i$

2) $\oint\limits_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = -2\pi i$

3) $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\sin(2z)}{\sin^2(z)-0.5} dz = 12\pi i$

4) א) $z=0$ קוטב מסדר 5 , $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2
ב) $I=-7$

5) א) $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$ אפסים מסדר 1 (פשוטים)
$z=2\pi k$ קטבים מסדר 3
$z=\pi(2k+1)$ קטבים מסדר 1

ב) -1 (כלומר סיבוב אחד עם כיוון השעון)

המשמעות הגיאומטרית של עקרון הארגומנט

שאלות

1) מצאו ע"י עקרון הארגומנט את N - מספר האפסים (כולל ריבוי) של הפולינום $p(z)=z^2+1$ בחצי המישור העליון $\operatorname{Im}(z)>0$

(הכוונה בלי לפתור את המשוואה $z^2+1=0$)

2) מצאו ע"י עקרון הארגומנט את N - מספר האפסים (כולל ריבוי) של הפולינום $p(z)=z^4+8z^3+3z^2+8z+3$ בחצי המישור הימני $\operatorname{Re}(z)>0$

תשובות סופיות

1) 1

1) 2

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

משפט רושה

שאלות

2) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4+5z+1$ בעיגול היחידה $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$?

3) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=5z^4+z+1$ בעיגול היחידה $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$?

4) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4+5z+4$ בעיגול $D(0,2)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<2\}$?

5) כמה פתרונות יש למשוואה $z^5+3z+1=0$ בתחום $D(0,1)=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$?

6) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^4-10z+1$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<3\}$?

7) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=\frac{1}{2}z^6-5z^4+7z$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$?

8) כמה אפסים יש לפונקציה $h(z)=z^{10}+8z^9+12z^2+1$ בתחום $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,1<|z|<2\}$?

9) יהי $m\geq 2$ טבעי. מצאו את מספר האפסים של $h(z)=ze^{m-z}-1$ ב - $|z|<1$

10) יהי $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$ עיגול היחידה ויהיו $a_1,\dots,a_n\in D$ נקודות שונות.

נסמן $B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}\cdot z}$. הוכיחו כי לכל $z_0\in D$ למשוואה $B(z)=z_0$ יש n פתרונות

רמז: הוכיחו קודם כי ההעתקה $B(z)=\prod_{j=1}^{n}\frac{z-a_j}{1-\overline{a_j}\cdot z}$ מעתיקה את מעגל היחידה לעצמו.

11) הוכיחו כי קיים מספר $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ יש בדיוק פתרון אחד למשוואה $\sin(z)=z^n$ בדיסק $D\left(0,\frac{1}{2}\right)=\left\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<\frac{1}{2}\right\}$

12) לפי הגדרה, נקודת שבת של f היא נקודה z_0 כך ש $f(z_0)=z_0$.

הוכיחו כי אם f אנליטית בעיגול היחידה הסגור כך שלכל $|z|=1$ מתקיים $|f(z)|<1$ אז קיימת ל f נקודת שבת אחת בדיוק בעיגול היחידה הפתוח.

תשובות סופיות

13) 1
14) 4
15) 4
16) 4
17) 3
18) 1
19) 3
20) 1
21) הוכחה
22) הוכחה
23) הוכחה

משפט הורוויץ

שאלות

1) הוכיחו כי קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ למשוואה

$$z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = 0$$

יש פתרון אחד בדיוק בתחום $|z - \pi| < 1$

2) הוכיחו כי לכל $R > 0$ קיים $N_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > N_0$ למשוואה

$$1 + z + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} = 0$$

אין פתרון ב $D(0, R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$

קיום פונקציות לוגריתמיות ושורשים

שאלות

1) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C} \setminus \{(-\infty, -1] \cup [1, \infty)\}$ לפונקציה $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ קיים לוגריתם אנליטי.

2) א) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ לפונקציה $f(z) = \frac{z-i}{z+i}$ קיים לוגריתם אנליטי.

ב) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ לפונקציה $f(z) = z^2 \frac{z-i}{z+i}$ קיימת פונקציית שורש אנליטית מסדר 2.

3) א) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C} \setminus [-1, 1]$ לפונקציה $f(z) = 1 - z^2$ לא קיים לוגריתם אנליטי.

ב) הוכיחו כי בתחום $\mathbb{C} \setminus [-i, i]$ לפונקציה $f(z) = 1 - z^2$ קיימת פונקציית שורש אנליטית מסדר 2.

4) הוכיחו כי $|z| > 4$ לפונקציה $f(z) = (z-2)^2 - 4$ לא קיים לוגריתם אנליטי אך כן קיימת פונקציית שורש מסדר 2.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com