מיון נקודות סינגולריות

סדר של אפס – הגדרה 1:

נניח כי $f(z)$ אנליטית ב z_0 ושקיים $N \in \mathbb{N}$

כך ש $f(z_0) = \ldots = f^{(N-1)}(z_0) = 0$ וגם $f^{(N)}(z_0) \neq 0$

אז נאמר כי z_0 זה אפס מסדר N של $f(z)$

סדר של אפס – הגדרה 2 (שקולה להגדרה 1):

נניח כי $f(z)$ אנליטית ב z_0 וכי קיימת פונקציה $g(z)$ אנליטית ב z_0

כך ש $f(z) = (z - z_0)^N g(z)$ בסביבת z_0 וגם $g(z_0) \neq 0$

אז נאמר כי z_0 זה אפס מסדר N של $f(z)$

משפט:

אם $f(z)$ אנליטית ב z_0, מתאפסת ב z_0 והיא לא פונקציית האפס אז בהכרח z_0 זה אפס מסדר $N \in \mathbb{N}$ כולשהו של $f(z)$.

הגדרה – נקודה סינגולרית מבודדת:

נניח כי קיים $R_2 > 0$ כך ש $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z - z_0| < R_2$ כאשר $0 < R_2 \leq \infty$

אז נאמר כי z_0 זו נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$.

מיון נקודות סינגולריות מבודדות:

נניח כי z_0 זו נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$,

כלומר נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0<|z-z_0|<R_2$ כאשר $0<R_2\le\infty$

אזי (לפי משפט לורן) קיים לה פיתוח לטור לורן בטבעת זו הנתון ע"י

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$$

והשיוויון מתקיים בטבעת $0<|z-z_0|<R_2$

סוג הנקודה הסינגולרית	מיון לפי טור לורן	מיון לפי גבול
סליקה	$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+\dots$ (כלומר אין חזקות שליליות)	הגבול $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ קיים וסופי
קוטב מסדר N	$f(z)=a_{-N}(z-z_0)^{-N}+a_{-N+1}(z-z_0)^{-N+1}+\dots$ (כלומר יש מספר סופי של חזקות שליליות והחזקה השלילית ביותר היא $-N$) $a_{-N}\neq 0$	מתקיימים שני התנאים הבאים: א. $\lim\limits_{z\to z_0}\|f(z)\|=\infty$ ב. $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^N f(z)\neq 0$ (הגבול קיים סופי ושונה מ-0)
עיקרית	$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-z_0)^n$ כאשר יש אינסוף חזקות שליליות	הגבול $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)$ לא קיים (תלוי במסלול)

הערות:

1. כאשר ממיינים נקודה סינגולרית לפי פיתוח לטור לורן, הפיתוח ייעשה אך ורק בטבעת שרדיוסה הפנימי הוא 0, כלומר בתחום מהצורה $0<|z-z_0|<R_2$ עבור $0<R_2\le\infty$ כלשהו.
2. אם הנקודה z_0 אינה נקודה סינגולרית מבודדת (משמע קיימת של נקודות סינגולריות שונות, שאינן סליקות, המתכנסת ל z_0) אז רק נאמר כי z_0 נקודה סינגולרית שאינה מבודדת.
3. אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ מסדר N אז קיימת $g(z)$ אנליטית ב z_0, כך ש $g(z_0)\neq 0$ וגם $f(z)=\dfrac{g(z)}{(z-z_0)^N}$ בסביבה נקובה של z_0.

טענה חשובה: (ראו הוכחה בתרגיל 3 במיון נק' סינגולריות)

תהי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ מנת פונקציות אנליטיות בנקודה z_0 ונניח כי:

z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$

z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$

אזי:

1. אם $n\ge m$ (כלומר אם סדר האפס של המונה גדול/שווה מסדר האפס של המכנה) אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$
2. אם $n<m$ (כלומר אם סדר האפס של המונה קטן ממש מסדר האפס של המכנה) אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$

משפט רימן לנקודות סינגולריות סליקות

יהי D תחום ותהי $a\in D$ נקודה כלשהי ונניח כי $f(z)$ אנליטית ב - $D\setminus\{a\}$

אזי הטענות הבאות שקולות:

1. ניתן להרחיב את $f(z)$ באופן הולומורפי בנקודה a
2. ניתן להרחיב את $f(z)$ באופן רציף בנקודה a
3. קיימת סביבה של a בה $f(z)$ חסומה
4. $\lim\limits_{z\to a}(z-a)f(z)=0$

מיון הנקודה הסינגולרית אינסוף

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

הגדרה: נאמר כי ∞ זו נקודה סינגולרית מבודדת של $f(z)$ אם קיים $R>0$ כך ש $f(z)$ אנליטית ב $|z|>R$

הגדרה: במידה ו - ∞ זו נקודה סינגולרית מבודדת ש $f(z)$ אז סיווג הנקודה הסינגולרית ∞ ייעשה לפי הסיווג של הנקודה $z=0$ עבור הפונקציה $f\left(\frac{1}{z}\right)$

משפט קסורטי - ויירשטראס

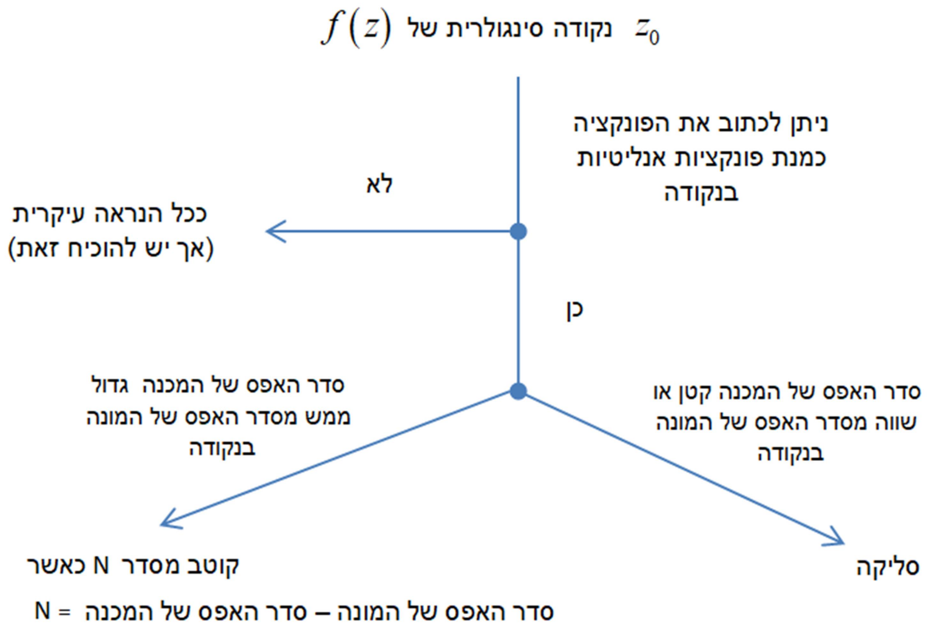
הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח כי $f(z)$ הולומורפית בתחום U מלבד בנקודה סינגולרית עיקרית אחת $z_0\in U$

אז לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $w\in\mathbb{C}$ קיים $z\in U$ כך ש $0<|z-z_0|<\delta$ ו - $|f(z)-w|<\varepsilon$

ניסוח שקול: אם z_0 נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$ אז לכל $w\in\mathbb{C}$ קיימת סדרת נקודות שונות $z_n\xrightarrow{n\to\infty}z_0$ כך ש $f(z_n)\xrightarrow{n\to\infty}w$

<u>תרשים זרימה - מיון נקודות סינגולריות מבודדות</u>



שימו לב! תרשים זה תקף עבור נקודות סינגולריות מבודדות בלבד.
במידה ויש נקודה סינגולרית לא מבודדת, נרשום רק שהיא לא מבודדת.

אפסים של פונקציות אנליטיות

שאלות

1) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z)$ בנקודה $z=0$.

2) קבעו את סדר האפס של הפונקציה $f(z)=z\sin(z^3)$ בנקודה $z=0$.

3) נניח כי הפונקציה $f(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר n.
נניח כי הפונקציה $g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר m.
הוכיחו כי הפונקציה $h(z)=f(z)g(z)$ אנליטית ב- z_0 ומתאפסת שם מסדר $n+m$.

4) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=z^{20}\sin(z)$ בנקודה $z_0=0$.

5) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $f(z)=e^{\sin(z)}-\sin^2(z)$ בנקודה $z_0=0$.

6) נניח כי לפונקציה $f(z)$ יש אפס מסדר 7 בנקודה $z_0=0$.
נניח כי לפונקציה $g(z)$ יש אפס מסדר 3 בנקודה $z_0=0$.
מצאו את סדר האפס של הפונקציה $h(z)=f(z)+g(z)$.

7) מצאו סדר אפס עבור הפונקציה $h(z)=6\sin(z^3)+z^{12}(z^6-6)$ בנקודה $z_0=0$.

8) נניח כי $f(z):D\to\mathbb{C}$ כאשר $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,|z|<1\}$
ונניח כי $f^3(z)$ ו - $f^4(z)$ פונקציות הולומורפיות ב D
הוכיחו כי $f(z)$ הולומורפית ב D

9) הוכיחו כי לא קיימת $f(z)$ אנליטית ב $B_1(0)$ כך ש $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}$ לכל $n\in\mathbb{N}$

תשובות סופיות

1) $N=2$
2) $N=2$
3) הוכחה
4) $N=21$
5) $N=1$
6) $N=3$
7) $N=3$
8) הוכחה
9) הוכחה

מיון נקודות סינגולריות

שאלות

1) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\frac{1}{1-z}$.

2) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת $z=0$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 7 של $f(z)$.
נניח כי $z=0$ זה אפס מסדר 11 של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- $z=0$?

3) נניח כי $h(z)=\frac{f(z)}{g(z)}$ כאשר $f(z)$ ו- $g(z)$ אנליטיות בסביבת z_0.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר n של $f(z)$.
נניח כי z_0 זה אפס מסדר m של $g(z)$.
מהו סוג הסינגולריות של $h(z)$ ב- z_0 ? חלקו למקרים $n\ge m$ ו- $n<m$.

א. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1-\cos(z)}{z^2}$.

ב. מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\sin\left(\frac{1}{z}\right)$.

4) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=ze^{\frac{1}{z}}$.

5) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cos\left(\frac{1}{z}\right)$.

6) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{e^{-z}-1}+\frac{1}{z}$.

7) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{\sin(z)}{\cos(z)}$.

8) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\frac{1}{z^2-1}\cos\left(\frac{\pi z}{z+1}\right)$.

9) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=e^{\frac{z}{z-2}}$.

10) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{z-\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)}{\sin\left(\frac{1}{z-1}\right)\cdot(z-1)^{100}}$.

11) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=z\cot(z)$.

12) מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{\sin(z)}{(z-2\pi)^2}$ ופתחו את הפונקציה לטור לורן סביבן.

13) מצאו ומיינו את כל הנקודות הסינגולריות של הפונקציה $f(z)=\dfrac{(z^2-4)(z-1)^4}{\left[1-\cos(2\pi z)\right]^2}$.

14) מיינו את הנקודות $z=0$ ו - $z=\frac{\pi}{4}$ עבור $f(z)=\dfrac{\tan(z)}{z^2-\frac{\pi}{4}z}$.

15) תהיינה $f,g:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ פונקציות שלמות שאינן קבועות.

נניח כי לכל $z\in\mathbb{C}$ מתקיים $|f(z)|\le|g(z)|$

א. הוכיחו שכול נקודה סינגולרית של $\dfrac{f(z)}{g(z)}$ הינה סליקה

ב. הוכיחו כי $f(z)=c\cdot g(z)$ כאשר c קבוע המקיים $|c|\le 1$

16) מצאו ומיינו את הנקודות הסינגולריות של $f(z)=\dfrac{\left(z^2-\frac{1}{4}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{z}\right)}$.

17) הוכיחו כי הנקודה $z=i$ היא נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

18) תהי $f(z):D\to\mathbb{C}$ אנליטית כאשר $D=\{z\in\mathbb{C}\,|\,0<|z-z_0|<1\}$.
נניח כי מתקיים $|z-z_0|^a|f(z)|\le 1$ לכל $z\in D$ עבור $0\le a<1$
הוכיחו כי z_0 נקודה סינגולרית סליקה של $f(z)$

19) (אתגר)
נתונה $f(z)$ אנליטית בתחום $0<|z|<1$ המקיימת $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n!}$
הוכיחו כי $z=0$ זו נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$

20) (אתגר)
הוכיחו כי אם z_0 זה קוטב של $f(z)$ אז היא בהכרח עיקרית של $g(z)=e^{f(z)}$
רמז: רשמו את $f(z)$ באופן הבא $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ כאשר $\varphi(z_0)=r_0e^{i\alpha}$
והתבוננו בסדרות הבאות $w_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\pi+\alpha}{m}}$ $\qquad$ $z_n=z_0+\frac{1}{n}e^{i\frac{\alpha}{m}}$

תשובות סופיות

1) $z=1$ קוטב מסדר 1
2) $z=0$ קוטב מסדר 4
3) אם $n\ge m$ אז z_0 נקודה סינגולרית מסוג סליקה של $h(z)$
ואם $n<m$ אז z_0 קוטב מסדר $m-n$ של $h(z)$
4) $z=0$ עיקרית
5) $z=0$ עיקרית
6) $z_k=2\pi ik$ קטבים מסדר 1
7) $z_k=\frac{\pi}{2}+\pi k$ קטבים מסדר 1
8) $z=-1$ עיקרית ו- $z=1$ קוטב מסדר 1
9) $z=2$ עיקרית
10) $z=0$ לא מבודדת ו- $z_k=\frac{1}{\pi k}$ קטבים מסדר 1
11) $z=0$ סליקה ו- $z_k=\pi k\ne 0$ קטבים מסדר 1
12) $z=0$ סליקה

13) $z=2$ אפס מסדר 2, $z=0$ קוטב מסדר 5, $z=\pm\pi i$ קטבים מסדר 2
14) $z=0$ סליקה, $z=\frac{\pi}{4}$ קוטב מסדר 1
15) א) הוכחה
ב) הוכחה
16) $z=0$ לא מבודדת
$(k\ne 0,2,-2)$ $z_k=\frac{1}{k}$ קטבים מסדר 1
$z=\pm\frac{1}{2}$ סליקות
17) הוכחה
18) הוכחה
19) הוכחה
20) הוכחה

מיון נקודות סינגולריות באינסוף

שאלות

1) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=\frac{z^2}{1+z}$.

2) מיינו את הנקודה הסינגולרית ∞ של הפונקציה $f(z)=e^z$.

תשובות סופיות

1) ∞ זה קוטב מסדר 1 של $f(z)$

2) ∞ זאת נקודה סינגולרית עיקרית של $f(z)$

משפט קסורטי - ויירשטראס

שאלות

1) א) הוכיחו כי הנקודה $z_0=i$ היא נק' סינג' עיקרית של $f(z)=\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)$.

ב) הסיקו כי קיים מספר $z\in\mathbb{C}$ כך ש $\left|\cos\left(\frac{1}{z^2+1}\right)-100\tan^2(z)+e^{-z^2}-5i\right|<1$

תשובות סופיות

1) א) הוכחה

ב) הוכחה