העתקות מתקדמות

העתקה קונפורמית:

פונקציה $f(z):D\to\mathbb{C}$ תקרא קונפורמית אם ורק אם היא שומרת זווית ואוריינטציה.

משפט:

$f(z):D\to\mathbb{C}$ קונפורמית אם ורק אם היא אנליטית שם ו - $f'(z)\neq 0$ לכל $z\in D$

המישור המרוכב המורחב:

נסמן $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ המישור המרוכב המורחב

העתקת מוביוס:

פונקציה מהצורה $f(z)=\dfrac{az+b}{cz+d}$ תקרא העתקת מוביוס אם רק אם $ad-bc\neq 0$

באופן כללי העתקות מוביוס אלו העתקות מהמישור המורחב לעצמו, כלומר:

$$f(z):\widehat{\mathbb{C}}\to\widehat{\mathbb{C}}$$

אם $c\neq 0$ אז נגדיר $f\left(-\dfrac{d}{c}\right)=\infty$ וכמו כן $f(\infty)=\dfrac{a}{c}$

אם $c=0$ אז נגדיר $f(\infty)=\infty$

תכונות של העתקת מוביוס:

1) העתקת מוביוס מעבירה מעגלים/ישרים למעגלים/ישרים (לאו דווקא בהתאמה)
ולכן מספיק להסתכל על 3 נקודות בלבד כאשר בודקים לאן קו ישר או מעגל מועבר

2) העתקת מוביס נקבעת באופן יחיד ע"י 3 נקודות בלבד בעזרת היחס הכפול

$$\frac{w-w_1}{w-w_3}\frac{w_2-w_3}{w_2-w_1}=\frac{z-z_1}{z-z_3}\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}$$

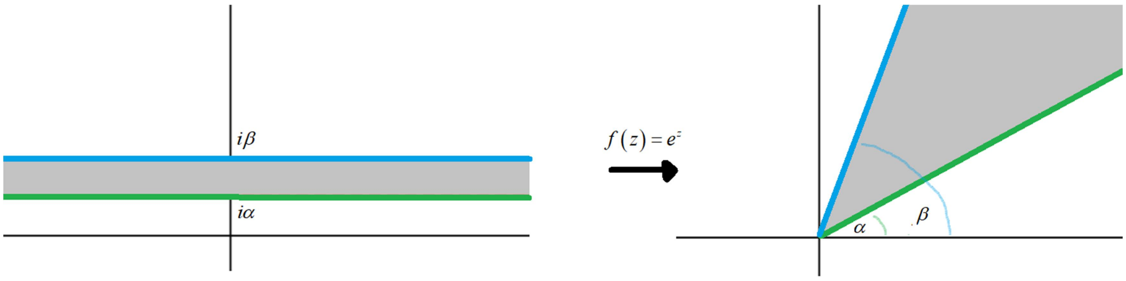
שקילות קונפורמית:

תחומים $A,B\subseteq\mathbb{C}$ ייקראו שקולים קונפורמית אם קיימת העתקה $f:A\to B$ קונפורמית חח"ע ועל.

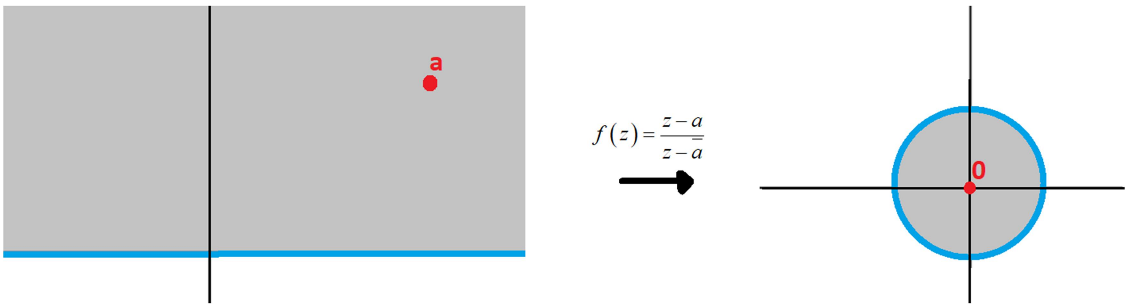
שקילויות קונפורמיות ידועות:

1) העתקת אקספוננט $f(z)=e^{z}$ הינה שקילות קונפורמית בין הרצועה האופקית $A=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\alpha<\operatorname{Im}(z)<\beta\}$ והגזרה $B=\{z=re^{i\theta}\,|\,0<r<\infty\ ,\ \alpha<\theta<\beta\}$

כאשר $0<\beta-\alpha\leq 2\pi$.



2) ההעתקה $f(z)=\frac{z-a}{z-\overline{a}}$ כאשר $a\in H_{+}$ הינה שקילות קונפורמית בין חצי המישור העליון H_{+} ודיסק היחידה הפתוח $D_{1}(0)$.   הערה: $H_{+}=\{z\in\mathbb{C}\ \ |\ \ \operatorname{Im}(z)>0\}$



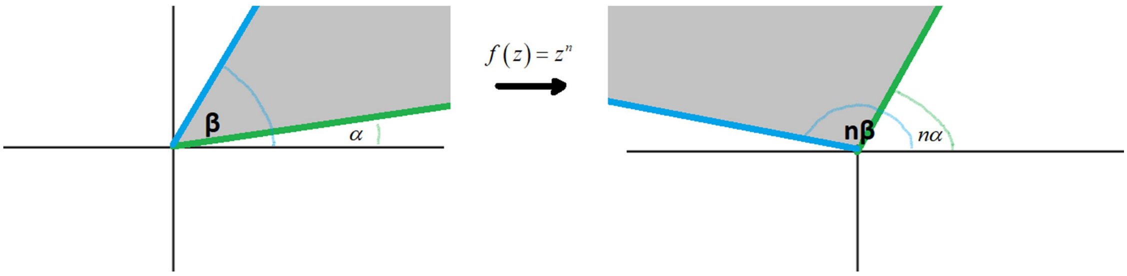
3) ההעתקה $f(z)=z^n$ הינה שקילות קונפורמית בין הגזרה

$$A=\left\{z=re^{i\theta}\ \mid\ 0<r<\infty\ ,\ \alpha<\theta<\beta\right\}$$

והגזרה

$$B=\left\{z=re^{i\theta}\ \mid\ 0<r<\infty\ ,\ n\alpha<\theta<n\beta\right\}$$

כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו - $0<\beta-\alpha\le\frac{2\pi}{n}$.



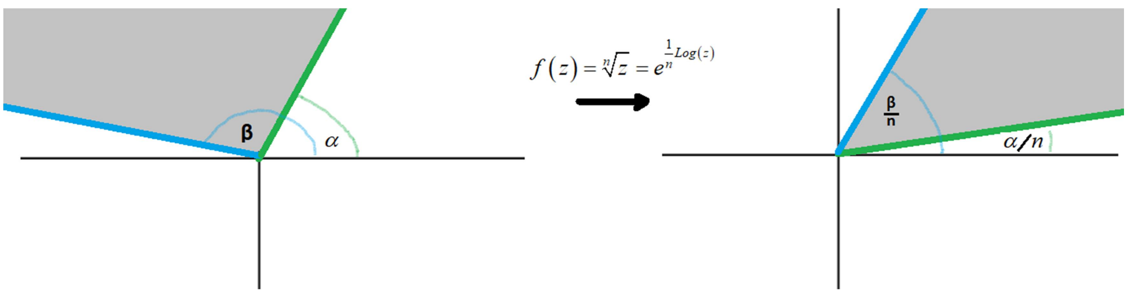
4) ההעתקה $f(z)=\sqrt[n]{z}=e^{\frac{1}{n}Log(z)}$ (הענף הראשי של $\sqrt[n]{z}$)הינה שקילות קונפורמית בין הגזרה

$$A=\left\{z=re^{i\theta}\ \mid\ 0<r<\infty\ ,\ \alpha<\theta<\beta\right\}$$

והגזרה

$$B=\left\{z=re^{i\theta}\ \mid\ 0<r<\infty\ ,\ \frac{\alpha}{n}<\theta<\frac{\beta}{n}\right\}$$

כאשר $n\in\mathbb{N}$ ו - $-\pi\le\alpha<\beta\le\pi$.



העתקות קונפורמיות

שאלות

1) הוכיחו כי ההעתקה $T(z)=z+1$ מעתיקה את התחום $A=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ אל התחום $B=\{w\in\mathbb{C}\ |\ |w-1|<1\}$.

2) חשבו את $f(-6),f(6),f(6i),f(-6i)$ כאשר $f(z)=e^{i\frac{\pi}{2}}\cdot z$
מהי המשמעות הגיאומטרית של ההעתקה?

3) מצאו את תמונת מעגל היחידה תחת ההעתקה כאשר $f(z)=2z$
מהי המשמעות הגיאומטרית של ההעתקה?

4) מצאו העתקה ליניארית המעתיקה את החצי המישור העליון $H^+=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Im}(z)>0\}$ אל חצי המישור הימני $H^r=\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0\}$.

5) מצאו העתקה ליניארית המעתיקה את הרביע הראשון $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)>0,\mathrm{Im}(z)>0\}$ אל הרביע השלישי $\{z\in\mathbb{C}\,|\,\mathrm{Re}(z)<0,\mathrm{Im}(z)<0\}$.

6) מצאו את תמונת הקבוצה $A=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|=2\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{1}{z}$.

7) מצאו את התמונה של $A=\left\{z=re^{i\frac{\pi}{4}}\ |\ r\geq 0\right\}$ תחת ההעתקה $f(z)=z^2$.

8) מצאו את התמונה של $A=\{z=e^{i\theta}\ |\ 0\leq\theta\leq\pi\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)$.

9) מצאו את התמונה של $A=\{z=x+iy\ |\ -\pi<y\leq\pi\ ,\ 0\leq x\leq 1\}$ תחת $f(z)=e^z$.

10) מצאו את התמונה של $C\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $w=Log(z)$.

11) מצאו את התמונה של $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|\leq 1\}\setminus(-\infty,0]$ תחת ההעתקה $w=Log(z)$.

12) מצאו את התמונה של $\{z=x+iy\ |\ 0\leq x\leq 1\ ,\ 0\leq y\leq 1\}$ תחת ההעתקה $w=z^2$.

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) סיבוב של 90 מעלות נגד כיוון השעון

3) התמונה היא $B_2(0)$ והמשמעות הגיאומטרית היא מתיחה פי 2

4) $f(z)=e^{-i\frac{\pi}{2}}z$

5) $f(z)=e^{i\pi}z$

6) $\left\{\omega\in\mathbb{C}\,|\,|\omega|=\frac{1}{2}\right\}$

7) $f[A]=\left\{\omega=r^2e^{i\frac{\pi}{2}}\ \ |\ r\geq 0\right\}$ החצי החיובי של הציר המדומה

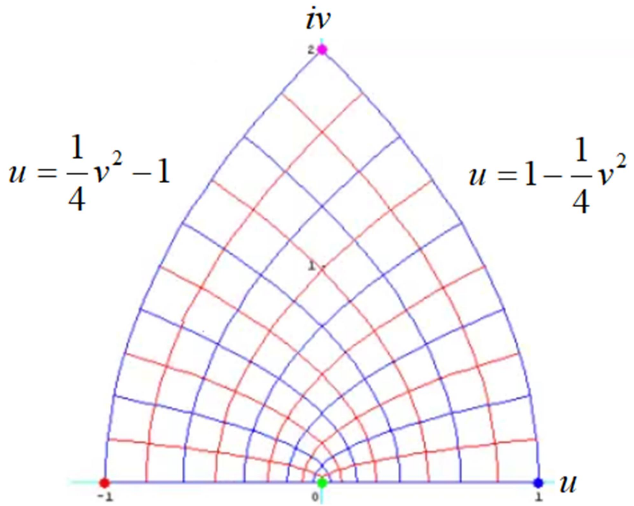
8) $[-1,1]$

9) $\{z=re^{i\theta}\ \ |\ 1\leq r\leq e,-\pi<\theta\leq\pi\}$

10) $\{\omega=x+iy\ \ |\ -\infty<x<\infty,-\pi<y<\pi\}$

11) $\{\omega=x+iy\ \ |\ -\infty<x\leq 0,-\pi<y<\pi\}$

12)



העתקות מוביוס

שאלות

1) תרגיל זה מחולק ל-2 סעיפים:

א. הוכיחו כי הרכבת העתקות מוביוס הינה העתקה מוביוס,
כלומר אם $f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ ו- $g(z)=\frac{Az+B}{Cz+D}$ אז $f\circ g(z)$ גם העתקת מוביוס.

ב. חשבו את כפל המטריצות:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

מה הקשר להרכבת העתקות מוביוס?

2) הוכיחו כי העתקת מוביוס $w=f(z)=\frac{az+b}{cz+d}$ היא פונקציה קבועה כאשר $ad-bc=0$.

3) מצאו את התמונה של $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$.
הדרכה: ניתן להשתמש בעובדות הבאות:

א. העתקת מוביוס מעבירה קווים ישרים/מעגלים לקווים ישרים/מעגלים.
ב. מעגל אינו מכיל את נקודת האינסוף.

4) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z-1}{z+1}$.

5) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$.

6) מצאו את התמונה של $D=\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z+i}{z-i}$.

7) מצאו את התמונה של $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \operatorname{Im}(z)>0\}$ תחת ההעתקה $f(z)=\frac{z-a}{z-\overline{a}}$
כאשר $a\in H^+$.

8) מצאו העתקה חד-חד ערכית ועל מהתחום $\{z\in\mathbb{C}\ |\operatorname{Re}(z)>0,\operatorname{Im}(z)>0\}$
אל עיגול היחידה $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ (אין צורך להוכיח חח״ע ועל).

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

9) מצאו העתקה חח"ע ועל מהתחום $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1, \mathrm{Im}(z)>0\}$
אל עיגול היחידה $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z|<1\}$ (אין צורך להוכיח חח"ע ועל).

10) מצאו העתקה חח"ע ועל מהתחום $\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z-2|<2\}\setminus\{z\in\mathbb{C}\ |\ |z-1|<1\}$
אל הרצועה האינסופית $\{z=x+iy\ |\ -\infty<x<\infty\ ,\ 0<y<1\}$.

11) מצאו העתקה קונפורמית חח"ע ועל בין $A=\{z\in\mathbb{C}\ |\ 0<\mathrm{Im}(z)<1\}$
והרביע הראשון.

12) מצאו העתקה קונפורמית חח"ע ועל בין $A=\left\{z=re^{i\theta}\ |\ r>0\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right\}$
ו - $B=\{z\in\mathbb{C}\ |\ 0<\mathrm{Im}(z)<1\}$

13) מצאו העתקה קונפורמית חח"ע ועל בין $A=\left\{z=re^{i\theta}\ |\ r>0\ ,\ 0<\theta<\frac{\pi}{4}\right\}$
ו - $B=D(0,1)$

14) נגדיר $H^+=\{z\in\mathbb{C}\ |\ \mathrm{Im}(z)>0\}$
בהינתן זוג נקודות $z_1,z_2\in H^+$ מצאו שקילות קונפורמית $f(z)$ בין חצי המישור העליון H^+ לעצמו כך ש - $f(z_1)=z_2$.

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) הוכחה

3) חצי המישור השמאלי

4) חצי המישור העליון

5) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > 1\}$

6) חצי המישור השמאלי

7) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$

8) $T(z) = \frac{z^2 - i}{z^2 + i}$

9) הרביע השני

10)
$$f(z) = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1(z)$$
$$f_1(z) = \sqrt{z} = e^{\frac{1}{2}\log(z)} \quad 0 < \theta < 2\pi$$
$$f_2(z) = \frac{z-1}{z+1} \ , f_3(z) = e^{-i\frac{\pi}{2}} z \ , f_4(z) = z^2$$

11)
$$f(z) = f_2 \circ f_1(z)$$
$$f_1(z) = \frac{\pi}{2} z \ , \ f_2(z) = e^z$$

12)
$$f(z) = f_2 \circ f_1(z)$$
$$f_1(z) = Log(z) \ , f_2(z) = \frac{4}{\pi} z$$

13) $f(z) = \frac{z^4 - i}{z^4 + i}$

14)
$$f(z) = f_2^{-1} \circ f_1(z)$$
$$f_2(z) = \frac{z - z_2}{z - \overline{z_2}} \ , \ f_2^{-1}(z) = \frac{\overline{z_2} \cdot z - z_2}{z - 1} \ , \ f_1(z) = \frac{z - z_1}{z - \overline{z_1}}$$