אינטגרציה מרוכבת

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת:

בהינתן $f(z)=u+iv$ רציפה על הקטע $[a,b]$ נגדיר $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b u(x)dx+i\int_a^b v(x)dx$

מסילה במישור המרוכב

מסילה במישור המרוכב זו פונקציה רציפה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$.

בקורס הזה אנו נניח כי $\gamma(t)$ גזירה ברציפות למקוטעין וכי $\gamma'(t)\neq 0$ חסומה.

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת:

בהינתן מסילה $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ ופונקציה $f(z)$ רציפה על γ נגדיר

$$\int_\gamma f(z)dz=\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$$

משפט הערכה (ML)

נניח כי $f(z)$ רציפה על מסילה γ (חלקה למקוטעין) בעלת אורך סופי

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right|\le \max_{z\in\gamma}|f(z)|\cdot Length(\gamma)$$

משפט קושי - גורסט

אם $f(z)$ אנליטית בתחום פשוט - קשר D אז לכל מסילה פשוטה וסגורה בתחום מתקיים $\oint_C f(z)dz=0$

נוסחת האינטגרל של קושי

נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום D.

אזי לכל $a \in D$ ולכל מסילה C פשוטה, סגורה, חלקה למקוטעין בתחום המקיפה את a (במגמה חיובית) מתקיים $f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי

נניח כי $f(z)$ אנליטית בתחום D.

אזי לכל $a \in D$, לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל מסילה C פשוטה, סגורה, חלקה למקוטעין בתחום המקיפה את a (במגמה חיובית) מתקיים $f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$

פונקציה קדומה - הגדרה

פונקציה $F(z)$ אנליטית בתחום Ω תקרא קדומה של $f(z)$

אם ורק אם $F'(z)=f(z)$ לכל $z \in \Omega$

משפט על קיום פונקציה קדומה

לפונקציה אנליטית $f(z)$ בתחום Ω יש קדומה בתחום Ω

אם ורק אם $\oint_\gamma f(z)dz=0$ לכל מסילה סגורה γ בתחום.

משפט מוררה

תהי $f(z)$ רציפה בתחום U כך שלכל מסילה סגורה בתחום מתקיים $\oint_\gamma f(z)dz=0$

אזי $f(z)$ אנליטית בתחום U (ויש לה שם גם קדומה)

הערה: מוררה הוכיח כי מספיק להסתכל על מסילות מהצורה של משולש

<u>התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות הולומורפיות</u>

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

יהי U תחום ותהי $f_n(z)$ סדרה של פונקציות הולומורפיות בתחום המתכנסת במ"ש לפונקציה $f(z)$ על כל קבוצה קומפקטית בתחום, אזי $f(z)$ הולומורפית בתחום.

<u>משפט על קיום לוגריתם אנליטי</u>

הערה: לא כולם לומדים נושא זה

נניח כי $f(z)$ אנליטית שאינה מתאפסת בתחום פשוט קשר Ω.

אז קיימת פונקציה אנליטית $g(z)$ ב Ω כך ש $f(z)=e^{g(z)}$ לכל $z\in\Omega$

אינטגרל ממשי של פונקציה מרוכבת

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}e^{-imx}dx$, לכל $m,n\in\mathbb{Z}$.

2) לכל $z\in\mathbb{C}$, המקיים $\operatorname{Re}(z)<0$, פתרו את האינטגרל $\int_{0}^{\infty} e^{zt}dt$.

תשובות סופיות

1) $\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\neq m \end{cases}$

2) $-\frac{1}{z}$

אינטגרל מרוכב של פונקציה מרוכבת

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} z^n dz$, כאשר $n \in \mathbb{Z}$.

2) חשבו את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} \frac{z+2}{z} dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 2e^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi \right\}$.

3) חשבו את האינטגרל $\int\limits_{\gamma} (z-1) dz$, כאשר $\gamma = \left\{ z = 1 + e^{i\theta} \mid \pi \le \theta \le 2\pi \right\}$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{\gamma} \pi e^{\pi \bar{z}} dz$, כאשר γ מסילת קווים ישרים, העוברת בנקודות $\gamma : 0 \to 1 \to 1+i \to i \to 0$.

5) חשבו את אורך המסילה $\gamma = [z_1, z_2]$, כאשר $\gamma = [z_1, z_2]$ היא מסילת הקו הישר המחברת בין z_1 ל- z_2.

6) חשבו את אורך המסילה $\gamma(t) = \left\{ (t - \sin t) + i \cdot (1 - \cos t) \ \mid \ 0 < t < 1 \right\}$.

7) חשבו את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \bar{z} dz$,

תשובות סופיות

1) $\begin{cases} 0 & n \neq -1 \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$

2) $2\pi i - 4$

3) 0

4) $4e^{\pi} - 4$

5) $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

6) ≈ 0.48

7) $2\pi i$

משפט הערכה (ML)

שאלות

הוכיחו את אי השוויונות הבאים:

1) $\left|\int_C \frac{z^3}{z^2+1}dz\right| \le \frac{81\pi}{8}$, כאשר $C=\{|z|=3\ ,\ \operatorname{Re}(z)>0\}$.

2) $\left|\int_{|z|=3} \frac{1}{z^2-1}dz\right| \le \frac{6\pi}{8}$

3) $\left|\int_C e^{z^2}dz\right| \le \sqrt{8}$, כאשר C הינה מסילת הקו הישר מ- 0 עד $2+2i$.

4) $\left|\int_C \frac{z^2}{\sin(z)}dz\right| \le \frac{\pi^2}{2}+2$, כאשר C הוא הקטע הישר המתחיל בנקודה $\frac{\pi}{2}+i$ ומסתיים בנקודה $\frac{\pi}{2}-i$.

משפט קושי גורסט

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_{0}^{2+\frac{i\pi}{4}} e^{z}dz$.

2) הוכיחו כי $\int_{4}^{1+i} \frac{1}{2\sqrt{z}}dz = \sqrt[4]{2}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) - 2 + i\sqrt[4]{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
כאשר $\sqrt{z}$ הינו הענף הראשי של פונקציית השורש

תשובות סופיות

1) $\frac{e^{2}[1+i]}{\sqrt{2}} - 1$

2) הוכחה

נוסחת האינטגרל של קושי

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z} dz$.

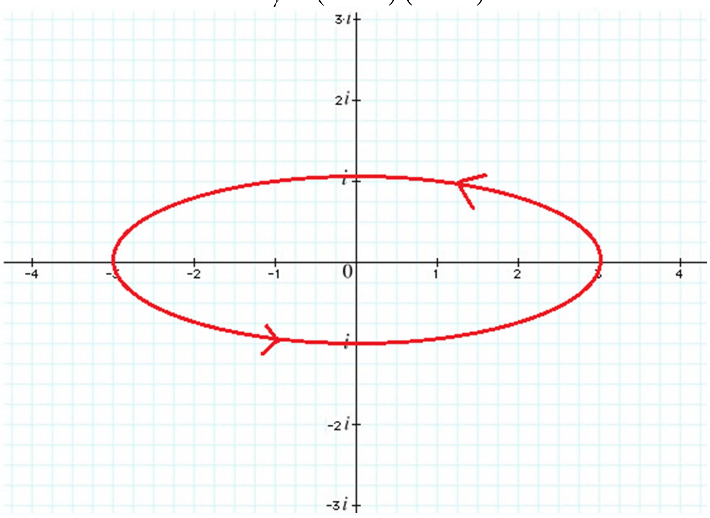
2) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z-2} dz$.

3) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z-2|=1} \frac{\sin(z^2)}{z(z-2)} dz$.

4) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{e^z+e^{-z}}{z(z-2)(z-3)} dz$.

5) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1.5} \frac{e^z}{z(z-1)(z-2)} dz$.

6) חשבו את האינטגרל $\oint_{\gamma} \frac{\sin(z)}{z(z-2)(z-4)} dz$, עבור המסילה שבציור:



7) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=2} \frac{z^2-e^{z^2}}{z(z^2-1)(z+3)} dz$.

8) (עקרון הממוצע)
תהי $f(z)$ הולומורפית בתחום D. נניח כי $z_0 \in D$
וכי הדיסק $\overline{D(z_0,R)} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-z_0| \le R\}$ מוכל כולו ב D. הוכיחו כי

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(z_0 + Re^{i\theta}\right)d\theta$$

9) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\pi} \frac{1}{2+\sin(2\theta)}d\theta$

10) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(\theta)\,d\theta = \frac{2\pi}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$

11) חשבו את האינטגרל $\int_C \frac{z}{z^2+1}dz$ כאשר $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 2, \operatorname{Im}(z) \ge 0\}$
(נגד כיוון השעון)

12) חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi} \frac{1}{a+b\cos(x)}dx$ עבור $a > b > 0$

13) חשבו את האינטגרל $\oint_{|z|=1} \frac{Log\left(1+\frac{z}{3}\right)}{z}dz$

14) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $|z| < 1$ כך ש - $u^2(0) = v^2(0)$
הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$ מתקיים $\int_0^{2\pi} u^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta = \int_0^{2\pi} v^2\left(re^{i\theta}\right)d\theta$

15) תהי $f(z) = u + iv$ הולומורפית בתחום $D = \{|z| < 1\}$ הוכיחו כי לכל $0 < r < 1$
ולכל $0 < |a| < r$ מתקיים

$$\oint_{|z|=r} \frac{\operatorname{Re}(z)}{z-a} f(z)\,dz = \pi i\left(\left[a + \frac{r^2}{a}\right]f(a) - \frac{r^2}{a}f(0)\right)$$

תשובות סופיות

1) $2\pi i$
2) $2\pi e^2 i$
3) $2\pi i\cdot\frac{\sin\left(2^2\right)}{2}$
4) $2\pi i\cdot\frac{1}{3}$
5) $\pi i-2\pi ei$
6) $-\frac{\sin(2)\pi i}{2}$
7) $\pi i\cdot\left(\frac{17}{12}-\frac{3e}{4}\right)$
8) הוכחה
9) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$
10) הוכחה
11) πi
12) $\frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$
13) 0
14) הוכחה
15) הוכחה

נוסחת האינטגרל המוכללת של קושי

שאלות

1) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-i|=1} \frac{\sin(z)}{(z-i)^3}dz$.

2) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=1} \frac{\cos(z)}{z^3}dz$.

3) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=4} \frac{\cos(z)}{(z-\pi)^2}dz$.

4) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z-1|=1} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

5) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=\frac{1}{2}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{z+1}\right)}{z^3}dz$.

6) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=6} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}z\right)}{(z-1)^2(z-3)}dz$.

7) חשבון את האינטגרל $\oint\limits_{|z|=5} \frac{1}{(z-2)^2(z-4)}dz$.

תשובות סופיות

1) $\frac{\pi}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$

2) $-\pi i$

3) $-2\pi i\cdot\sin(\pi)$

4) $-\frac{\pi+4}{4\sqrt{2}}\pi i$

5) $-2\pi^2 i$

6) $-\frac{\pi i}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$

7) 0

פונקציות קדומות

שאלות

1) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

2) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^n}$ $(n\ge 2)$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{0\}$? האם יש לה קדומה שם?

3) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-i,i\}$? האם יש לה קדומה שם?

4) האם הפונקציה $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ אנליטית בתחום $\mathbb{C}\setminus[-i,i]$? האם יש לה קדומה שם?

5) הוכיחו כי לפונקציה $f(z)=\frac{1}{z(z^2-\pi^2)}$ יש קדומה בתחום $D=\{|z|>\pi\}$

6) נסמן $I=\int_\Gamma \frac{2z}{z^2+1}dz$ כאשר $\Gamma=\{|z|=2,\operatorname{Im}(z)\ge 0\}$ בכיוון החיובי

א) האם לאינטגרנד יש פונקציה קדומה בתחום המכיל את Γ ?

ב) חשבו את I

7) נניח כי a,b מספרים מרוכבים בחצי המישור השמאלי, כלומר

$$\operatorname{Re}(a)<0\ ,\ \operatorname{Re}(b)<0 \qquad (a\ne b)$$

הוכיחו כי $|e^a-e^b|<|a-b|$

8) נניח כי $f(z),g(z)$ פונקציות שלמות המקיימות $f^2(z)+g^2(z)\equiv 1$

הוכיחו כי קיימת פונקציה שלמה $h(z)$ כך ש $f(z)=\cos[h(z)]$

ו - $g(z)=\sin[h(z)]$

הערה: תרגיל זה רלוונטי רק למי שלמד את המשפט על קיום לוגריתם אנליטי

תשובות סופיות

1) הפונקציה אנליטית אך אין לה קדומה בתחום
2) הפונקציה אנליטית ויש לה קדומה בתחום
3) הפונקציה אנליטית אך אין לה קדומה בתחום
4) הפונקציה אנליטית ויש לה קדומה בתחום
5) הוכחה
6) א) כן ב) $I = 2\pi i$
7) הוכחה
8) הוכחה

משפט מוררה

שאלות

1) תהי $f_n(z)$ סדרת פונקציות אנליטיות המתכנסת במ״ש לפונקציה $f(z)$ בתחום פשוט קשר D. הוכיחו כי:

א) $f(z)$ אנליטית בתחום D

ב) $\lim_{n\to\infty} f_n'(z) = f'(z)$ לכל $z \in D$

הערה: תחום זה קבוצה פתוחה וקשירה

התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות הולומורפיות

שאלות

1) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-a^2\cdot n\cdot z}$ הולומורפית ב $\operatorname{Re}(z)>0$

2) יהי $a>0$. הוכיחו כי הפונקציה $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(a+n)^z}$ הולומורפית ב $\operatorname{Re}(z)>1$

כאן $(a+n)^z$ מוגדרת באופן הבא: $(a+n)^z = e^{z\cdot Log(a+n)}$ ו - $Log(z)$ הענף הראשי

3) פונקציית זטא של רימן מוגדרת באופן הבא $\zeta(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$. הראו כי היא הולומורפית בתחום $\operatorname{Re}(z)>1$.

כאן n^z מוגדרת באופן הבא: $n^z = e^{z\cdot Log(n)}$ ו - $Log(z)$ הענף הראשי

4) תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה. נגדיר

$$L[f](z)=\int_0^{\infty} f(x)e^{z\cdot x}dx$$

נתון כי $L[f](z)$ רציפה בתחום $\operatorname{Re}(z)>0$. הוכיחו כי היא הולומורפית שם.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

תרגילים מסכמים

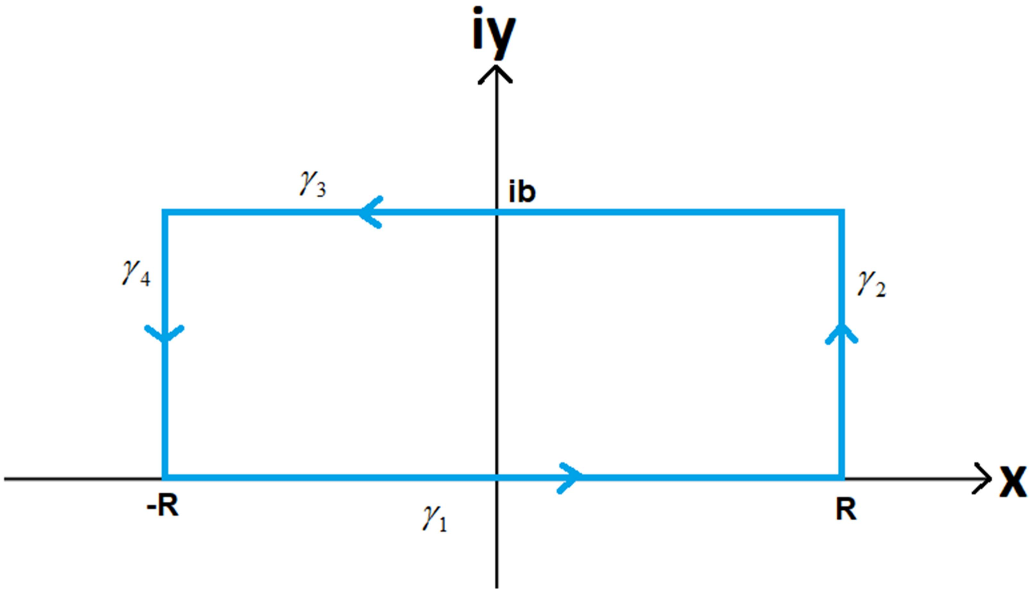
שאלות

1) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos(2bx)\,dx=\sqrt{\pi}e^{-b^2}$ עבור $b>0$

היעזרו בפונקציה $f(z)=e^{-z^2}$ ובמסילה $\gamma=\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3+\gamma_4$ כאשר

$$\gamma_1=\{z=x\,|\,-R\le x\le R\}$$
$$\gamma_2=\{z=R+iy\,|\,0\le y\le b\}$$
$$\gamma_3=\{z=x+ib\,|\,x:R\to -R\}$$
$$\gamma_4=\{z=-R+iy\,|\,y:b\to 0\}$$

והראו כי $\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_2} f(z)\,dz=\lim\limits_{R\to\infty}\int_{\gamma_4} f(z)\,dz=0$

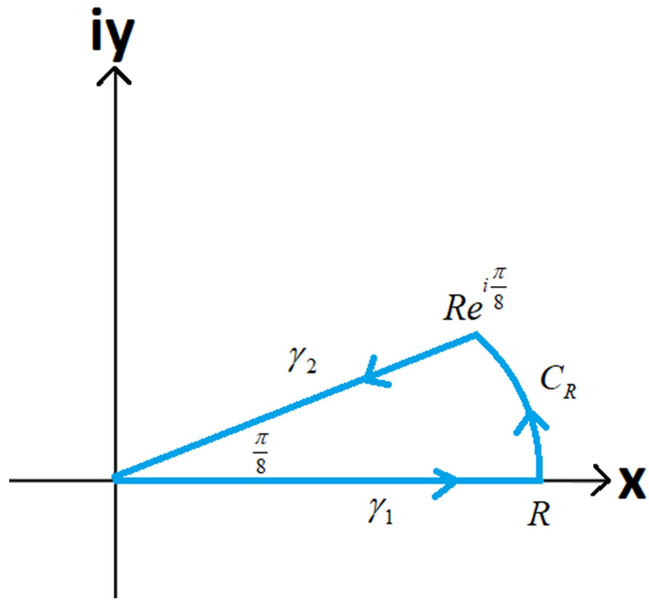


2) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\cos\left(x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ ו - $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\sin\left(x^2\right)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt[4]{2}}\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

היעזרו בפונקציה $f\left(z\right)=e^{-\sqrt{2}z^2}$ ובמסילה $\gamma=\gamma_1+C_R+\gamma_2$ כאשר

$$\gamma_1=\left\{z=x \mid 0\le x\le R\right\}$$
$$C_R=\left\{z=Re^{i\theta} \mid 0\le\theta\le\frac{\pi}{8}\right\}$$
$$\gamma_2=\left\{z=xe^{i\frac{\pi}{8}} \mid x:R\to 0\right\}$$

והראו כי $\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f\left(z\right)dz=0$



3) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \pi$

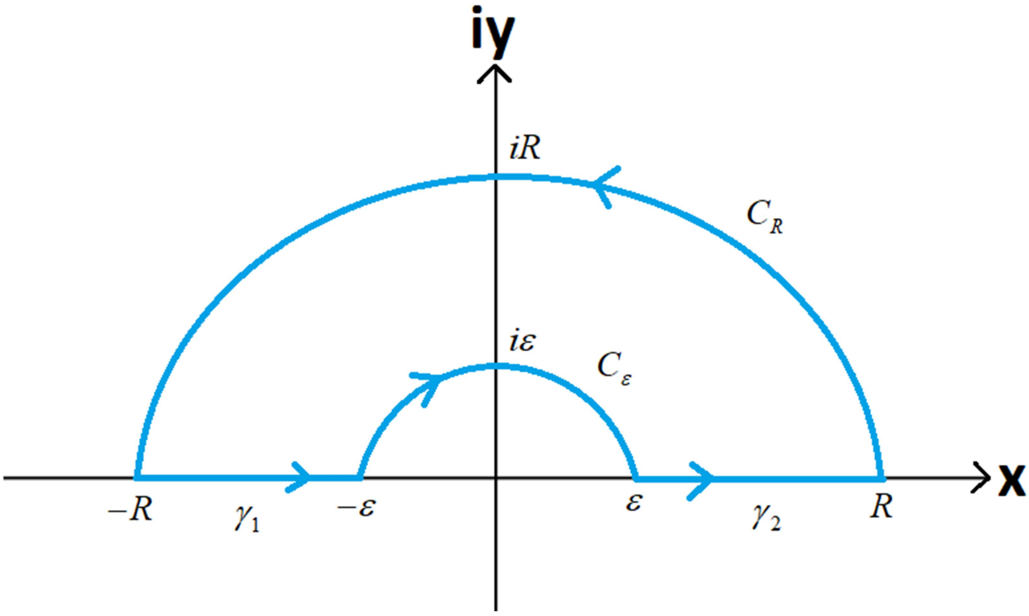
הדרכה:

א) הראו כי $\frac{\sin^2(x)}{x^2} = \text{Re}\left[\frac{1-e^{i2x}}{2x^2}\right]$

ב) הגדירו $f(z) = \frac{1-e^{i2z}}{2z^2}$ והסבירו מדוע $\oint_\gamma f(z)dz = 0$ כאשר

$$\gamma_1 = \{z = x \mid \varepsilon \le x \le R\}$$
$$\gamma_2 = \{z = x \mid -R \le x \le -\varepsilon\}$$
$$C_R = \{z = Re^{i\theta} \mid 0 \le \theta \le \pi\}$$
$$C_\varepsilon = \{z = Re^{i\theta} \mid \theta : \pi \to 0\}$$

ג) הוכיחו כי $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = 0$ ו - $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{C_\varepsilon} f(z)dz = \pi$



4) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^6(x)}{x^6} dx$ תשובה סופית: $\frac{88}{5 \cdot 2^5}\pi$

5) הוכיחו כי $\int_0^{2\pi} \frac{1}{(a+b\cos(\theta))^2} d\theta = 2\pi \frac{a}{(a^2-b^2)^{\frac{3}{3}}}$ עבור $a>b>0$

6) תהי $f(z) = \frac{1}{(1+az)^2} + \frac{1}{(1+bz)^2}$

כאשר $a,b \in \mathbb{C}$ קבועים המקיימים $|b|<1$, $|a|<1$ שונים מאפס.

נניח כי $|f(z)| \le 3$ לכל $|z|=1$. הוכיחו כי $|a^n+b^n| \le \frac{3}{n+1}$ לכל $n \ge 0$.

רמז: התבוננו ב - $|f^{(n)}(0)|$