תוכן העניינים:

שימו לב!
החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה בסרטוני התיאוריה שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט בסרטוני השאלות שבאתר.

פרק 9

מעגלי זרם חילופין ומעגלי תהודה

מעגלי זרם חילופין:

סיכום כללי:

מהו מעגל זרם חילופין? (מעגל Alternating Current - AC)

מעגל זרם חילופין הוא מעגל שבו מחוברים מקורות חשמליים סינוסיים, כלומר הוא מוזן מאות סינוסידיאלי, כגון: $v_{in}(t)=V\cos(\omega t)$, $\left[\omega=2\pi f=\frac{2\pi}{T}\right]$.

במעגלי AC אנחנו נניח מספר הנחות יסודיות אשר יאפיינו את מעגלים אלו:

1) מעגל המורכב מרכיבים ליניאריים ואליו מוזן אות AC מהווה מערכת ליניארית.
2) מעגל AC, בכל ניתוחו, מתייחס רק לפרקי הזמן בהם כל תופעות המעבר דעכו לאפס. נקרא למצב המעגל במקרה זה בשם: **המצב היציב (Steady State) של המעגל**.
3) עירור המעגל תקף לגבי כל המערכת והוא בתדר זוויתי אחד בלבד, ω, הנקבע ע"י מקור האנרגיה.

ייצוג פאזורי של אות:

נסמן אות סינוסי כללי באופן הבא: $x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)$ ונקבל:

$x(t)=X\cos(\omega t+\varphi)=\mathrm{Re}\left\{\bar{X}(\omega)\cdot e^{j\omega t}\right\}$.

כאשר:

$x(t)$ - הוא אות מתח או זרם כלשהו.

$\omega=2\pi f$ - מייצג את המהירות הזוויתית (כאשר f הוא התדר הזוויתי).

X - היא אמפליטודת האות.

φ - פאזה התחלתית של האות.

למספר $\bar{X}(\omega)$ אנו קוראים **הפאזור של האות** או פשוט "הפאזור" (Phasor).

במעגלי זרם חילופין, היות וכל רכיבי המעגל פועלים באותו התדר ונבדלים זה מזה בפאזה שלהם, נעדיף לעבוד עם פאזורים מאשר עם אותות המתח והזרם עצמם.

פעולות מתמטיות עם פאזורים:

- **ליניאריות:**

הפאזור של אות המורכב מקומבינציה ליניארית של מספר אותות: $x(t)=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k x_k(t)$

כאשר $\alpha_k \in \mathbb{R}$ $\forall k:$, הוא: $\bar{X}=\sum_{k=1}^{N}\alpha_k \bar{X}_k$.

- **גזירה:**

גזירה של אות $x(t)$ שקולה להכפלת הפאזור פי $j\omega$:

$$x(t)\to\bar{X}\quad;\quad z(t)=\frac{d}{dt}x(t)\to\bar{Z}$$
$$\bar{Z}=j\omega\bar{X}$$

- **אינטגרציה:**

אינטגרציה של אות $x(t)$ שקולה לחלוקת הפאזור פי $j\omega$:

$$x(t)\to\bar{X}\quad;\quad z(t)=\int x(t)\,dt\to\bar{Z}$$
$$\bar{Z}=\frac{1}{j\omega}\bar{X}$$

עכבה של רכיב במעגל זרם חילופין:

במעגל AC תדר הפעולה ω הוא קבוע לכל רכיבי המעגל, לכן נעזר בפאזורים של האותות בלבד על מנת לכתוב את העכבה באופן הבא:

$$\bar{Z}=\frac{\bar{V}}{\bar{I}}=\frac{Ve^{j\varphi_V}}{Ie^{j\varphi_I}}=\frac{V}{I}\exp\left\{j\left(\varphi_V-\varphi_I\right)\right\}$$

לגודל הנ"ל קוראים בשם **עכבה** **(Impedance)** מאחר והוא מתאר "עד כמה המתח על פני רכיב מסוים מתעכב ביחס לזרם דרכו".

- העכבה היא מספר מרוכב, שיחידותיו הן אוהמים $[\Omega]$.
- גודל העכבה מקיים: $\left|\bar{Z}\right|=Z=\frac{V}{I}$.
- הפאזה של העכבה היא: $\varphi_Z=\varphi_V-\varphi_I$.

מתירות של רכיב במעגל זרם חילופין:

בדומה להגדרת העכבה, נגדיר את **המתירות (Admittance)** באופן הבא:

$$\bar{Y}=\frac{\bar{I}}{\bar{V}}=\frac{Ie^{j\varphi_I}}{Ve^{j\varphi_V}}=\frac{I}{V}\exp\left\{j\left(\varphi_I-\varphi_V\right)\right\}$$

כאשר מתקיים: $\bar{Y}=\frac{1}{\bar{Z}}$.

❖ **דוגמה - חישובי פאזורים יסודיים:**

אות מתח על פני רכיב מסוים הוא: $v(t)=12\cos\left(50\pi t+20^\circ\right)\ \mathrm{V}$

ואות הזרם הנמדד דרכו הוא: $i(t)=12\cos\left(50\pi t+135^\circ\right)\ \mathrm{mA}$.

א. כתוב את הפאזורים של אות המתח והזרם.

ב. כתוב את הפאזור של העכבה.

ג. כתוב את הביטוי הזמני של העכבה של רכיב זה.

כתיבה מקוצרת של פאזורים:

נוכל לכתוב את הפאזורים בצורה קרטזית או פולרית באופן הבא:

- כתיבה בצורה קרטזית: $\bar{Y}=Ye^{j\varphi}=Y\left(\cos\varphi+j\sin\varphi\right)$.
- כתיבה בצורה פולרית: $\bar{Y}=\left|\bar{Y}\right|\angle\arg\left\{\bar{Y}\right\}=Y\angle\varphi$.

❖ **דוגמה - כתיבה מקוצרת של פאזורים:**

נכתוב את הפאזור $Y=2e^{\frac{1}{3}\pi j}$ בצורה קרטזית ובצורה פולרית:

מעברים בין צורות הצגה:

עבור מספר מרוכב הנתון בצורה הקרטזית: $\bar{z}=a+jb$ נקבל את הקשרים הבאים:

$$|z|=\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\arg(z)=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

הכתיבה בצורה הפולרית היא: $\bar{z}=|\bar{z}|\angle\arg(\bar{z})$.

העכבה והמתירנות של רכיבים פאסיביים במעגל זרם חילופין:

	עכבה (אימפדנס)	מתירות (אדמיטנס)
נגד	$Z=R$	$Y=\frac{1}{R}=G$
קבל	$Z=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}$	$Y=j\omega C$
סליל	$Z=j\omega L$	$Y=\frac{1}{j\omega L}=-j\frac{1}{\omega L}$

עכבה כגודל כללי:

נכתוב את העכבה הכללית של מעגל (או של ענף כלשהו במעגל): $z=R+jX$
כאשר R הוא החלק הממשי של העכבה ו- X הוא החלק המדומה שלה.
הגודל X שונה בין קבל וסליל והוא מוגדר באופן הבא לפי מה שמצאנו לעיל:

$$X_L=\omega L \quad ; \quad X_C=-\frac{1}{\omega C}$$

לגודל הזה קוראים **היגב** (Reactance) והוא מתאר את המידה שבה רכיב ריאקטיבי מגיב לשינוי המתח והזרם עליו. היחידות של היגב הן אוהמים (Ω) בדומה לעכבה.

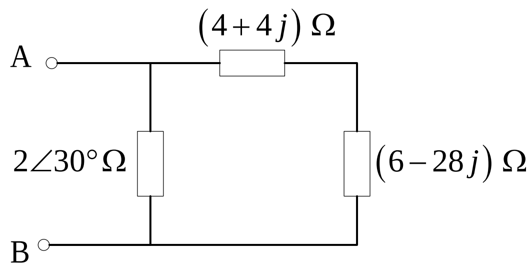
בשונה מהתנגדות אוהמית טהורה של נגד, היגב יכול לקבל ערכים שליליים!

אופי מעגל:

- מעגל שבו העכבה הכוללת היא מהצורה: $z=R+jX_C$ (כלומר החלק המדומה שלילי) נקרא מעגל עם אופי קיבולי. במעגל שכזה המתח מפגר אחר הזרם.
- מעגל שבו העכבה הכוללת היא מהצורה: $z=R+jX_L$ (כלומר החלק המדומה חיובי) נקרא מעגל עם אופי השראתי. במעגל שכזה המתח מקדים את הזרם.

❖ דוגמא - חיבורי פאזורים של עכבות:

מצא את העכבה השקולה בין הנקודות A ו-B :

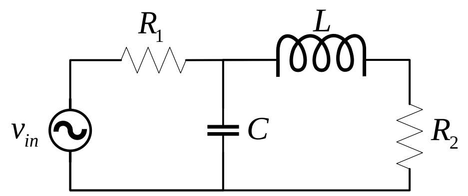


❖ דוגמא - ניתוח מעגלי AC:

המעגל שלפניך מוזן מאות מתח חילופין : $v_{in}(t)=4\cos(100t)\ \mathrm{V}$.

נתונים ערכי הרכיבים : $R_1=R_2=1\mathrm{k}\Omega$, $C=1\mu F$, $L=4\mathrm{mH}$.

מצא את עכבת המעגל השקולה ואת הזרם השקול הנכנס למעגל.



ניתוח מעגלי AC באמצעות משפטי הרשת – מתחי צמתים וזרמי חוגים:

מתחי צמתים:

נעזר בשיטת מתחי הצמתים בצורה זהה לשל מעגל זרם ישר :

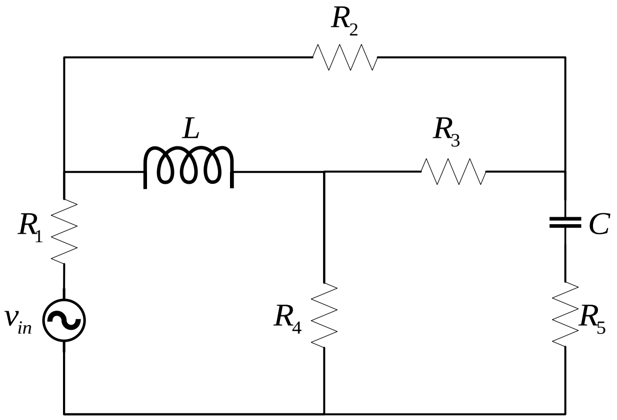
1) נבחר צומת ייחוס שתתפקד כ-״אדמה״.
2) נסמן את שאר הצמתים במעגל בסימון כגון : $v_1, v_2, v_3, \ldots$, או $v_A, v_B, v_C, \ldots$ וכו׳.
3) נחבר משוואות זרמים לפי KCL עבור כל צומת.
4) נבטא את הזרמים ע״י מתחי הצמתים ונפתור את מערכת המשוואות המתקבלות.

זרמי חוגים:

נעזר בשיטת זרמי החוגים בצורה זהה לשל מעגל זרם ישר :

1) נגדיר את הזרמים בכל לולאה סגורה עם כיוון השעון (למשל).
2) נסמן את הזרמים בכל לולאה : $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$, $\bar{I}_3$ וכו׳.
3) נחבר משוואות זרמים לפי KVL עבור כל לולאה.
4) נבטא את המתחים ע״י זרמי החוגים ונפתור את מערכת המשוואות המתקבלות.

❖ **דוגמא – ניתוח בשיטת מתחי צמתים וזרמי חוגים:**



נתון המעגל הבא ובו כל הרכיבים נתונים.

כתוב את משוואות המעגל לפי:

א. שיטת מתחי צמתים
(הסק את המטריצה: $\underline{\underline{Y}}\cdot\vec{v}=\vec{i}$)

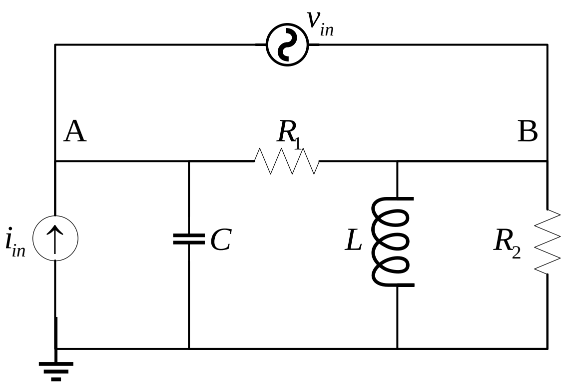
ב. לפי זרמי חוגים
(הסק את המטריצה: $\underline{\underline{Z}}\cdot\vec{i}=\vec{v}$)

ניתוח מעגלי AC באמצעות משפטי הרשת – סופרפוזיציה:

כפי שראינו במעגלי זרם ישר, שיטת הסופרפיזיציה טובה לשימוש בכל מעגל שבו מספר מקורות אנרגיה. נוכל להיעזר בשיטה זו לניתוח מעגלים כאשר קיימים מספר מקורות הפועלים באותו התדר, אולם, הכוח האמיתי הטמון בסופרפוזיציה בא לידי ביטוי דווקא כאשר מדובר במקורות הפועלים בתדרים שונים (או אפילו מפיקים אותות כניסה שונים ולאו דווקא סינוסיים!).

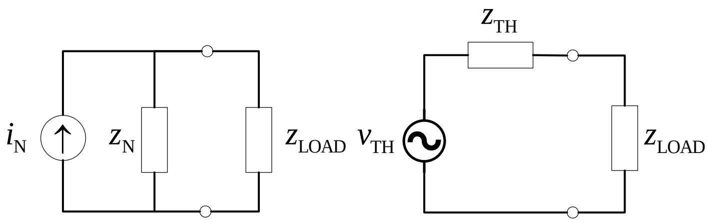
❖ **דוגמא - ניתוח מעגל בשיטת סופרפוזיציה:**

במעגל שלפניך נתונים שני מקורות האנרגיה הבאים: $v_{in}(t)=10\cos(100\pi t+45°)\ \text{V}$
ו- $i_{in}(t)=3\cos(50\pi t)\ \text{A}$. ערכי הרכיבים הם: $R_1=6\Omega$, $R_2=8\Omega$, $C=20\mu\text{F}$, $L=3\text{mH}$.
יש למצוא את הביטוי הזמני למתח בצומת A ביחס לאדמה שהוגדרה במעגל.



ניתוח מעגלי AC באמצעות משפטי הרשת – שקולי תבנין ונורטון:

תיאור שקולי תבנין ונורטון במעגלי זרם חילופין:



נבצע את השלבים הבאים:

1) מנתקים את הרכיב שבין הנקודות (הצמתים) הרלוונטיות.
נסמן אותן ב-A ו-B לצורך הנוחיות.

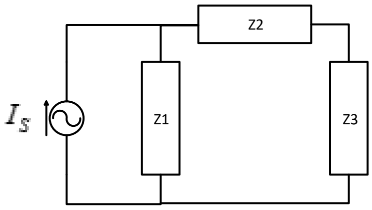
2) נמצא את העכבה השקולה z_{AB} ע"י שיתוק מקורות:
- מקור מתח מקצרים.
- מקור זרם מנתקים.

3) נמצא את מתח תבנין, v_{TH}, ע"י החזרת כל המקורות למעגל וחישוב המתח בין הנקודות A ו-B. כדי לעשות זאת נעזר בכל הטכניקות שנלמדו עד כה.

4) לאחר מציאת v_{TH} ו-z_{AB} נוכל לסרטט מעגל תבנין, או להמיר למעגל נורטון.
נזכור כי העומס הוא הרכיב שניתקנו מהמעגל.

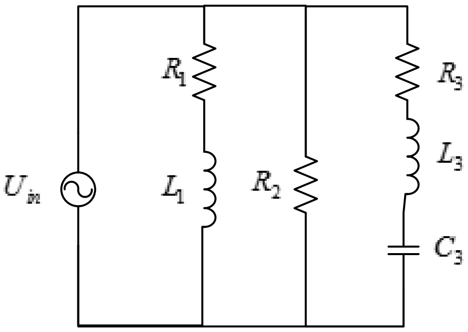
הגודל z_{AB} הוא z_{TH} והוא מקיים: $z_{TH} = z_N$ כאשר $i_N = \frac{v_{TH}}{z_{TH}}$.

שאלות:



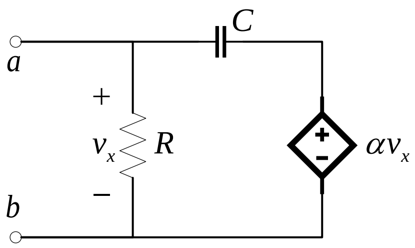
1) במעגל הבא נתון מקור זרם: $i_S(t)=\sqrt{8}\cos(400t+30°)\ \mathrm{A}$.
ערכי העכבות הם:
$Z_1=(2+2j)\Omega\ ,\ Z_2=(4-4j)\Omega\ ,\ Z_3=(2+7j)\Omega$.

א. חשב את הזרמים בכל עכבה.
ב. חשב את המתח על מקור הזרם.
ג. צמצם את המעגל לעכבה אחת ופרט את מרכיביה.



2) לפניך המעגל הבא:
נתון כי: $U_{in}=200\angle 0°\mathrm{V}\ ,\ f=50\mathrm{Hz}\ ,\ R_1=12\Omega$
$R_2=40\Omega\ ,\ R_3=30\Omega\ ,\ L_1=51\mathrm{mH}$
$L_3=95.8\mathrm{mH}\ ,\ C_3=79.5\mu\mathrm{F}$.

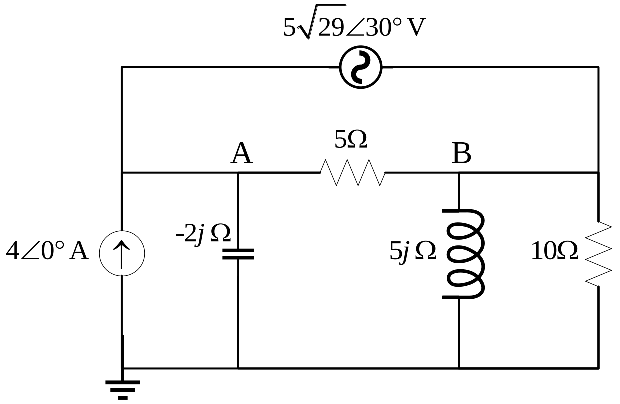
א. חשב את העכבה הכללית של המעגל ואת אופי המעגל.
ב. חשב את הזרם השקול של המעגל.
ג. חשב את הזרמים בכל ענף במעגל.



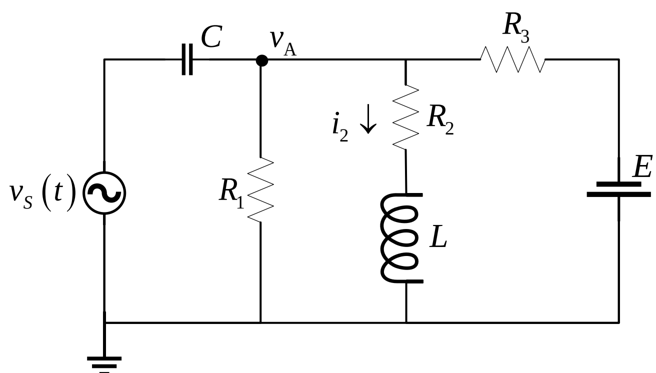
3) במעגל שלפניך נתון: $C=3\mu\mathrm{F}\ ,\ R=250\Omega$.
המעגל פועל בתדר זוויתי של $1000\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{sec}}$.
הפרמטר α הוא מספר ממשי חיובי.

א. כתוב ביטוי עבור עכבת המעגל המשתקפת מהנקודות a ו- b.
ב. מצא את ערכו של α עבורו העכבה תהיה התנגדותית טהורה. מה יהיה ערך העכבה במקרה זה?
ג. האם קיים ערך עבור α שמקיים כי העכבה השקולה (תבנין) תהיה $160+120j\ [\Omega]$? אם כן, מצא אותו. אם לא, נמק.
ד. עבור אלו ערכים של α העכבה תהיה בעלת אופי השראותי ועבור אילו ערכים היא תהיה בעלת אופי קיבולי? נמק.

4) במעגל שלפניך כל הערכים מופיעים בסרטוט.
יש למצוא באמצעות שיטת מתחי צמתים את הפאזורים של ערכי המתחים V_A
ו- V_B וכן את הביטוי עבור הפאזור של הזרם הזורם דרך מקור המתח.

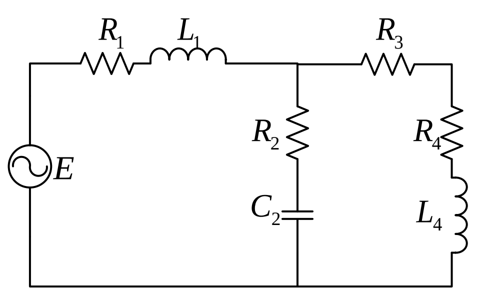


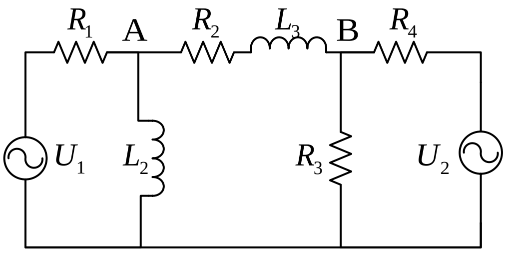
5) במעגל שלפניך נתוני הרכיבים הם:
$R_1 = 40\Omega$, $R_2 = 10\Omega$, $R_3 = 20\Omega$, $C = \dfrac{1}{1000\pi}$F , $L = \dfrac{1}{50\pi}$H , $E = 35$V .
נתון: $v_S(t) = 50\cos(2\pi \cdot 100 + 40°)$ V .



א. כתוב את המעגל בכתיב פאזורי.
ב. בשיטת הסופרפוזיציה, מצא את הביטוי הזמני של המתח בנקודה A ביחס לאדמה ואת הביטוי הזמני של הזרם i_2 .

6) לפניך המעגל הבא:
נתון: $E = 48\angle 0°$V , $R_1 = 3\Omega$, $X_{L_1} = 4\Omega$
$R_2 = 3\Omega$, $X_{C_2} = -4\Omega$, $R_3 = 4\Omega$
$R_4 = \dfrac{23}{6}\Omega$, $X_{L_4} = 4\Omega$.
חשב לפי תבנין את הזרם בנגד R_4 .





7) לפניך המעגל הבא:

ידוע כי: $R_1 = 5\Omega$, $R_2 = 2\Omega$, $R_3 = 6\Omega$

$R_4 = 4\Omega$, $X_2 = 5\Omega$, $X_3 = 3\Omega$

$U_1 = 30\angle 0°\text{V}$.

ערך מקור המתח U_2 אינו ידוע.

א. חשב את U_2 עבורו הזרם דרך הנקודות A ו-B יתאפס.

ב. חשב את הזרם דרך AB אם $U_2 = 30\angle 0°\ \text{V}$.

תשובות סופיות:

1) א. $I_1 = 2\angle 24.5°\text{A}$, $I_2 = I_3 = 0.852\angle 43°\text{A}$ ב. $U_S = 5.65\angle 69.5°\text{V}$

ג. $Z_T = (1.54 + 1.27j)\Omega$, מרכיבים: $L = 3.2\text{mH}$, $R = 1.54\Omega$.

2) א. $Z_T = (9.35 + 3.29j)\Omega$ - למעגל אופי השראותי.

ב. $I_T = 20.16\angle -19.37°\text{A}$

ג. $I_1 = 10\angle -53.13°\text{A}$, $I_2 = 5\text{A}$, $I_3 = 7.06\angle 18.33°\text{A}$.

3) א.
$$z_T = \frac{1}{\frac{1}{R} - j(\alpha - 1)\omega C} = \frac{1}{\frac{1}{R} + R(\alpha-1)^2\omega^2C^2} + j\frac{(\alpha-1)\omega C}{\frac{1}{R^2} + (\alpha-1)^2\omega^2C^2}$$

ב. $\alpha = 1$ ג. כן, $\alpha = 2$ ד. השראותית: $\alpha > 1$, קיבולית: $0 < \alpha < 1$.

4) $\bar{I}_{S2} = 10.57\angle 112.32°\ \text{A}$, $\bar{V}_\text{A} = 76.95\angle 26.22°\ \text{V}$, $\bar{V}_\text{B} = 50.11\angle 24.2°\ \text{V}$.

5) א. ראה כתיבה בסרטון הוידאו.

ב. $v_\text{A}(t) = 34.6\cos(2\pi \cdot 100 + 95°) - 10\ \text{V}$

$i_2(t) = 3.21\cos(2\pi \cdot 100 + 73.2°) - 1\ \text{A}$.

6) $I = 3.16\angle -71.56°\text{A}$.

7) א. $U_2 = 35.33\angle 45°\text{V}$ ב. $I = 1.73\angle 62.7°\text{A}$.

הספקים במעגלי זרם חילופין:

סיכום כללי:

הספק רגעי והספק ממוצע:

- ההספק הרגעי יחושב במישור הזמן לפי: $p(t)=i(t)v(i)$
  ובאמצעות פאזורים לפי: $p(t)=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}e^{2j\omega t}\}+\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}^*\}$.
- ההספק הממוצע יחושב במישור הזמן לפי: $P=\frac{IV}{2}\cos(\Delta\varphi)$
  ובאמצעות פאזורים לפי: $P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}^*\}$.

הספק מרוכב:

נגדיר את ההספק המרוכב באופן הבא:

$$S=\frac{1}{2}\bar{V}\bar{I}^*=P+jQ$$
$$\rightarrow\quad P=\frac{1}{2}\mathrm{Re}\{\bar{V}\bar{I}^*\}=\frac{VI}{2}\cos(\Delta\varphi)$$
$$\rightarrow\quad Q=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\{\bar{V}\bar{I}^*\}=\frac{VI}{2}\sin(\Delta\varphi)$$

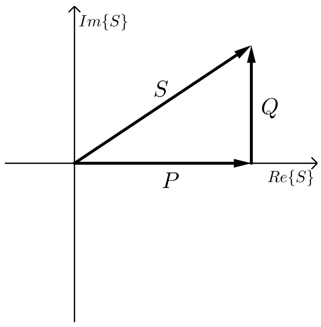
כאשר:

- P נקרא **ההספק האקטיבי (Active Power)** או **ההספק האקטיבי (Real Power)** בענף.
  הוא מתאר את ההספק האלקטרומגנטי שנמסר ממקור/ות האנרגיה לצרכן והופך לחום.
  יחידותיו הן וואט [Watt].
- Q נקרא **ההספק הריאקטיבי/העיוור (Reactive Power)** בענף.
  הוא מתאר את ההספק שנמצא במעגל ואינו מתבזבז.
  זה הספק שנוצר כתוצאה מאנרגיה חשמלית ברכיבים קיבוליים ואנרגיה מגנטית ברכיבים השראתיים והוא נשאר במערכת.
  יחידותיו הן וולט-אמפר ריאקטיבי [VAR].
- S נקרא **ההספק המרוכב (Complex Power)** או **ההספק הנראה/הנדמה (Apparent Power)** בענף. הוא מתאר את סך ההספק שבענף.
  יחידותיו הן וולט-אמפר [VA].

משולש הספקים:

נוח לצייר במישור המרוכב את ההספקים באופן הבא:

$$S=\sqrt{P^2+Q^2}$$
$$\Delta\varphi=\tan^{-1}\frac{Q}{P}$$
$$P=S\cos\Delta\varphi$$
$$Q=S\sin\Delta\varphi$$



הספקים של רכיבים פאסיביים:

	ביטויים להספקים
נגד	$S_R=\frac{1}{2}R\left\lvert\bar{I}_R\right\rvert^2>0 \;\rightarrow\; \begin{cases} P_R=\frac{1}{2}R\left\lvert\bar{I}_R\right\rvert^2 \\ Q_R=0 \end{cases}$
קבל	$S_C=-\frac{1}{2}j\omega C\left\lvert\bar{V}_C\right\rvert^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} P_C=0 \\ Q_C=-\frac{1}{2}j\omega C\left\lvert\bar{V}_C\right\rvert^2 \end{cases}$
סליל	$S_L=\frac{1}{2}j\omega L\left\lvert\bar{I}_L\right\rvert^2 \;\rightarrow\; \begin{cases} P_L=0 \\ Q_L=\frac{1}{2}j\omega L\left\lvert\bar{I}_L\right\rvert^2 \end{cases}$

ערך יעיל (RMS) של אות:

נגדיר את הערך היעיל/האפקטיבי של אות בשם: RMS = Root Mean Square.

הערך היעיל של אות זמני $x(t)$ המחזורי במחזור T יסומן X_{RMS} ויוגדר באופן הבא:

$$X_{\text{RMS}}=\sqrt{\overline{x^2(t)}}=\sqrt{\frac{1}{T}\int_t^{t+T}x^2dx}$$

נרצה לחשב את הערך היעיל של אות זרם ואות מתח AC, נקבל:

$$I_{\text{RMS}}=\frac{I}{\sqrt{2}}\;\;;\;\;V_{\text{RMS}}=\frac{V}{\sqrt{2}}.$$

נבטא את הגדלים של הספקים הממוצעים באמצעות הערכים היעילים של אותות מתח וזרם ונקבל:

$$P=\frac{IV}{2}\cos(\Delta\varphi)=\frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}}\cos(\Delta\varphi)=V_{\text{RMS}}\cdot I_{\text{RMS}}\cdot\cos(\Delta\varphi)$$

$$Q=\frac{IV}{2}\sin(\Delta\varphi)=\frac{V}{\sqrt{2}}\frac{I}{\sqrt{2}}\sin(\Delta\varphi)=V_{\text{RMS}}\cdot I_{\text{RMS}}\cdot\sin(\Delta\varphi)$$

$$S=\frac{1}{2}\bar{V}\,\bar{I}^*=\frac{\bar{V}}{\sqrt{2}}\frac{\bar{I}^*}{\sqrt{2}}=V_{\text{RMS}}\cdot I_{\text{RMS}}\cdot e^{j\cdot\Delta\varphi}$$

גורם ההספק:

מגדירים את היחס שבין שני ההספקים בתור **גורם ההספק (Power Factor)** של המעגל. נסמן באופן כללי את הזווית ב- φ (כאשר ברור כי מדובר בזווית ההפרש בין אות המתח לזרם כפי שהגדרנו וראינו עד כה - $\Delta\varphi$) ונגדיר את גורם ההספק באופן הבא: $P.F.=\cos\varphi=\frac{P}{S}$.

בהתאם להגדרה זו ניתן גם להגדיר את **גורם הריאקטיביות (Reactive Factor)** באופן הבא: $R.F.=\sin\varphi=\frac{Q}{S}$ אולם הוא לא נמצא בשימוש כלל.

אנרגיות ברכיבים פאסיביים:

בדומה לחישובי ההספקים, נרצה לבטא את האנרגיות הרגעיות והממוצעות באמצעות הפאזורים של אותות המתח והזרם.
עבור אנרגיה רגעית וממוצעת האגורה בקבל נקבל:

$$w_C(t)=\frac{1}{8}C\left(\bar{V}_C^2(\omega)e^{2j\omega t}+2\left|\bar{V}_C\right|^2+\bar{V}_C^{*2}(\omega)e^{-2j\omega t}\right)$$

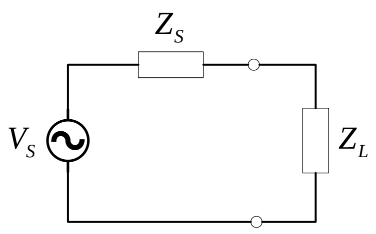
$$W_C=\frac{1}{4}C\left|\bar{V}_C\right|^2$$

עבור אנרגיה רגעית וממוצעת האגורה בסליל נקבל:

$$w_L(t)=\frac{1}{8}L\left(\bar{I}_L^2(\omega)e^{2j\omega t}+2\left|\bar{I}_L\right|^2+\bar{I}_L^{*2}(\omega)e^{-2j\omega t}\right)$$

$$W_L=\frac{1}{4}L\left|\bar{I}_L\right|^2$$

העברת הספק מירבי:



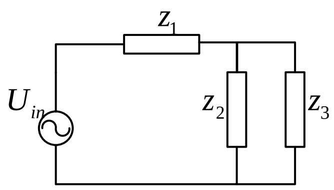
התלות בין העכבות עבור מעבר של הספק מירבי

היא כדלהלן: $Z_L = Z_S^* \Rightarrow \begin{cases} R_L = R_S \\ X_L = -X_S \end{cases}$.

ההספק המירבי עצמו יהיה: $P_{L,\max} = \frac{1}{2}\left|\bar{V}_S\right|^2 \frac{1}{4R_S}$.

שאלות:

1) במעגל שלפניך נתון:



$z_1 = (3+4j)\Omega \;,\; z_2 = (80+60j)\Omega$

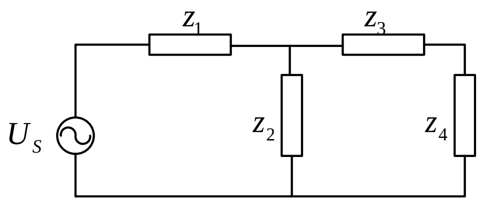
$z_3 = (30+40j)\Omega \;,\; U_{in} = 120\angle 0°\text{V}$

א. חשב את הזרם בכל אחת מהעכבות הנ"ל.

ב. חשב וסרטט את משולש ההספקים של המעגל.

2) לפניך המעגל הבא:

נתון: $U_S = 20\text{V} \;,\; z_4 = 90j\Omega \;,\; z_3 = -30j\Omega \;,\; z_2 = 60j\Omega \;,\; z_1 = 40\Omega$.



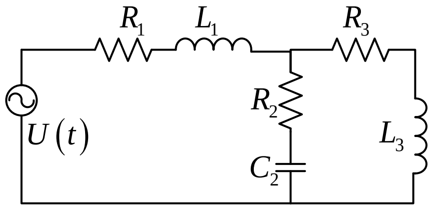
א. מה הזרם שימדוד מד-זרם המחובר בטור למקור המתח שבאיור?

ב. מה ההספק P (ב-W) של מקור המתח?

ג. מה ההספק ההיגבי Q (ב-VAR) של המקור?

ד. מה הפרש המופע (במעלות חשמליות) בין המתח שבין הדקי עכבה z_4 למתח המקור?

3) נתון המעגל הבא:

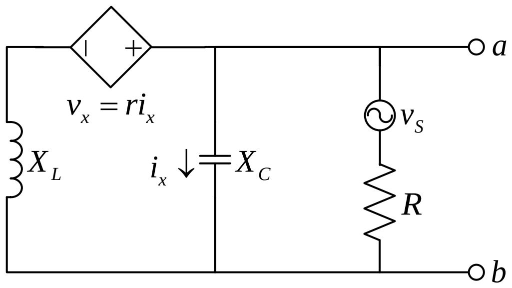


ידוע כי: $U(t)=25\sqrt{2}\cos(600t+30°)v$, $R_1=3\Omega$

$L_1=20\text{mH}$, $R_3=8\Omega$, $L_3=13.33\text{mH}$.

חשב את R_2 ו- C_2 לקבל הספק מירבי בענף שלהם.

4) במעגל שלפניך נתון:



$$v_S(t)=50\sqrt{2}\sin\left(50\pi t-\frac{\pi}{3}\right)\ [\text{V}]$$

$R=8\Omega$, $r=2\Omega$, $X_C=-10j\Omega$

$X_L=15j\Omega$.

א. מצא את ההתנגדות השקולה המשתקפת מבעד לצמתים a ו- b.

ב. מצא ביטוי לזרם העובר דרך עכבת עומס $Z_L=10-2j\ [\Omega]$.

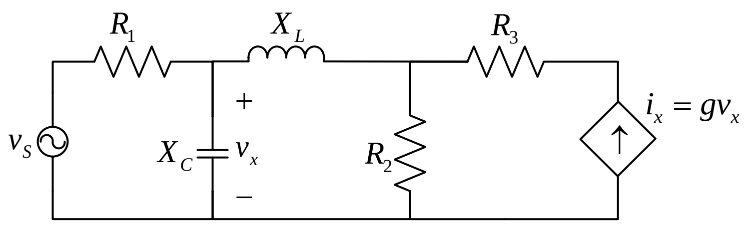
ג. מצא את העכבה Z_L עבורה ההספק דרכה יהיה מירבי ומצא את הספק זה.

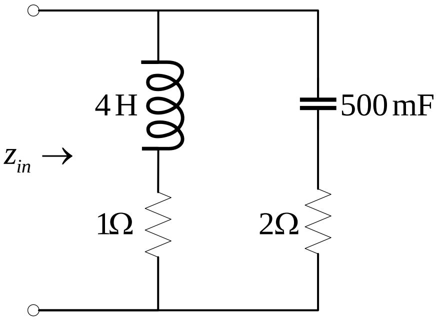
ד. סרטט דיאגרמה פאזורית של ההספקים מהסעיף הקודם.

5) במעגל שלפניך נתון: $[\text{V}]$ $v_S(t)=50\sqrt{2}\sin\left(60\pi t+\frac{\pi}{4}\right)$, $i_x=g\cdot v_x$,

$X_L=5j\Omega$, $X_C=-4j\Omega$, $R_1=2\Omega$, $R_2=4\Omega$, $R_3=8\Omega$, $g=0.1S$.

מצא את החלקים הממשי והמדומה של ההספק שמספק מקור הזרם התלוי.





6) נתון המעגל הבא:

א. מצא את עכבת המבוא, $z_{in}(j\omega)$.

נתון כי מתח המבוא הוא $v_S(t) = 50\cos(\omega t)\,[\mathrm{V}]$

והמעגל נמצא במצב סינוסי יציב.

ב. מה הוא ההספק הרגעי המסופק למעגל כפונקציה של הזמן?

ג. חשב את ההספק הרגעי על פני הסליל.

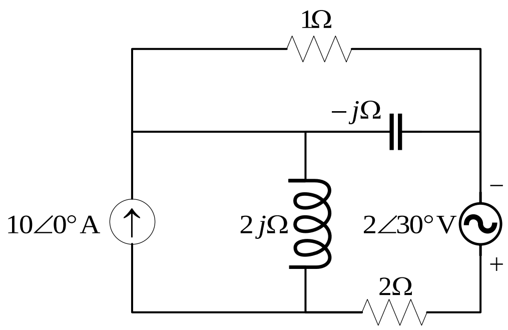
ד. חשב את האנרגיה המתבזבזת במחזור אחד על פני הסליל.

ה. חזור על סעיפים ג-ד עבור הנגד 1Ω והסבר את מהות התוצאות.

7) לפניך המעגל הבא ובו כל ערכי הרכיבים הרשומים.

א. מצא את ההספק המרוכב (הנראה), ההספק הממוצע ואת גורם ההספק עבור כל אחד מהמקורות במעגל הבא.
קבע מי מהם צורך הספק (צרכן) ומי נותן הספק (ספק).

ב. מסובבים את מקור המתח.
חזור על הניתוח מהסעיף הקודם וציין מה השתנה כעת.



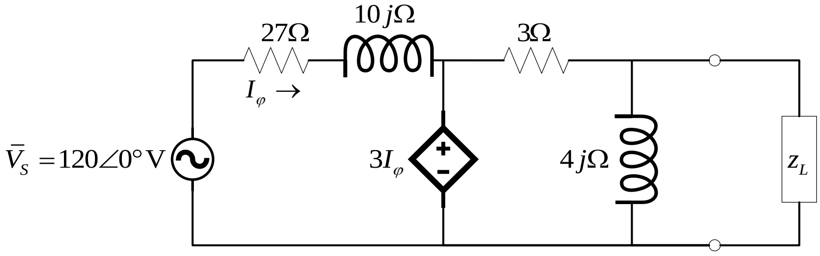
8) במעגל שלפניך מחברים עומס z_L כזה שנופל עליו הספק ממוצע מקסימלי.

א. קבע את הערך של העומס וחשב את ההספק הממוצע המתבזבז עליו.

ב. איזה אחוז מההספק המועבר במעגל מועבר לעומס?

ג. קבע מי מהמקורות הוא צרכן ומי הוא ספק. נמק.

ד. הראה את מאזן ההספקים המרוכב במעגל.



תשובות סופיות:

1) א. $I_1 = 3.1\angle -48.425°\text{A}$, $I_2 = 1.045\angle -37.568°\text{A}$, $I_3 = 2.09\angle -53.825°\text{A}$.

ב. $S = 372\text{VA}$, $Q = 278.88\text{VAR}$, $P = 246.849\text{W}$.

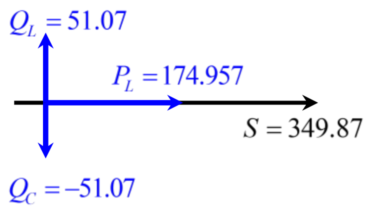
2) א. $I_T = 0.4\angle -36.86°\text{A}$ ב. 6.4W ג. 4.8VAR ד. $\Delta\varphi = 53.13°$.

3) $R_2 = 3.086\Omega$, $C_2 = 315\mu\text{F}$.

4) א. $z_{TH} = 8.58\angle -16.62°\Omega$ ב. $I = 4.04\angle -63.04°\text{A}$

ג. $z_L = 8.58\angle 16.62°\Omega$, $S = 349.87\angle 0°\text{VA}$

ד. להלן דיאגרמה פאזורית בצד.



5) $S = 522.214 - 106.58j = 532.98\angle -11.53°\,\text{VA}$.

6) א. $z_{in}(j\omega) = |z_{in}(j\omega)|\angle(z_{in}(j\omega)) = \sqrt{\dfrac{16\omega^4 + 17\omega^2 + 1}{4\omega^4 - 3\omega^2 + 1}}\angle \tan^{-1}\dfrac{4\omega - 6\omega^3}{8\omega^4 - \omega^2 + 1} \triangleq Z_{in}\angle\varphi_{Z_{in}}$

ב. $p_{in}(t) = 25I_{in}\left(\cos\left(2\omega t + \varphi_{I_{in}}\right) + \cos\left(\varphi_{I_{in}}\right)\right)$

ג. $p_L(t) = -2I_1^2 \sin\left(2\left(\omega t + \varphi_{I_1}\right)\right)$ ד. $W_L([0:T]) = 0[\text{J}]$

ה. $W_{1\Omega}([0:T]) = \dfrac{\pi}{\omega} I_1^2\ [\text{J}]$; $p_{1\Omega}(t) = \dfrac{1}{2} I_1^2\left(\cos\left(2\omega t + 2\varphi_{I_1}\right) + 1\right)$.

7) א. $P.F.(S_1) = 0.711$, $P_{S1,\text{AVG}} = 58.615\,\text{W}$, $S_{S1} = (58.615 + 57.85j)\ \text{VA}$

$P.F.(S_2) = 0.911$, $P_{S2,\text{AVG}} = 6.58\,\text{W}$, $S_{S2} = (6.58 - 2.975j)\ \text{VA}$

ב. $P.F.(S_1) = 0.752$, $P_{S1,\text{AVG}} = 58.935\,\text{W}$, $S_{S1} = (58.935 + 51.55j)\ \text{VA}$

$P.F.(S_2) = -0.826$, $P_{S2,\text{AVG}} = -5.4\,\text{W}$, $S_{S2} = (-5.4 + 3.68j)\ \text{VA}$

8) א. $P_{\text{AVG}} = 5.4\,\text{W}$, $z_L = (1.92 - 1.44j)\ \Omega$

ב. 2.63%. ג. מקור המתח הב"ת - ספק, מקור המתח התלוי - צרכן.

ד. $Q_{in} = Q_{out} = 72\,\text{VAR}$, $P_{in} = P_{out} = 205.2\text{W}$.

מעגלי תהודה:

סיכום כללי:

תהודה - הגדרה ראשונה:

תדר תהודה במעגל הינו תדר העירור עבורו עכבת המעגל השקולה היא ממשית טהורה.

נסמן את תדר התהודה ב- ω_0 וערכו במעגל RLC טורי הוא: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$

או במונחים של Hz: $[\text{Hz}]$ $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

סיכום - תופעת התהודה במעגל RLC טורי:

- בתדר התהודה עכבת המעגל היא גודל ממשי וערכה המוחלט הוא הקטן ביותר.
- בתדר התהודה הזרם במעגל הוא הגדול ביותר.
- תהודה של מעגל RLC טורי נקראת תהודת מתחים מכיוון שהמתחים על הקבל והסליל שווים בגודלם והפוכים בסימנם.
- במצב תהודה, המתח על פני הקבל או הסליל יכול להיות גדול יותר מערכו של מתח המקור.

סיכום - תופעת התהודה במעגל RLC מקבילי:

- בתדר התהודה עכבת המעגל היא גודל ממשי וערכה המוחלט הוא הגדול ביותר.
- בתדר התהודה הזרם במעגל הוא הקטן ביותר.
- תהודה של מעגל RLC מקבילי נקראת תהודת זרמים מכיוון שהזרמים על הקבל והסליל שווים בגודלם והפוכים בסימנם.
- במצב תהודה, הזרם שעובר מהקבל לסליל ולהיפך יכול להיות גדול יותר מערכו של מקור הזרם.

תהודה - הגדרה שנייה:

תדר התהודה הינו התדר עבורו האנרגיה החשמלית הממוצעת האגורה במעגל שווה לאנרגיה המגנטית הממוצעת האגורה בו. (הממוצעים מתייחסים למחזור שלם).
כלומר: $\langle W_E \rangle = \langle W_M \rangle$.

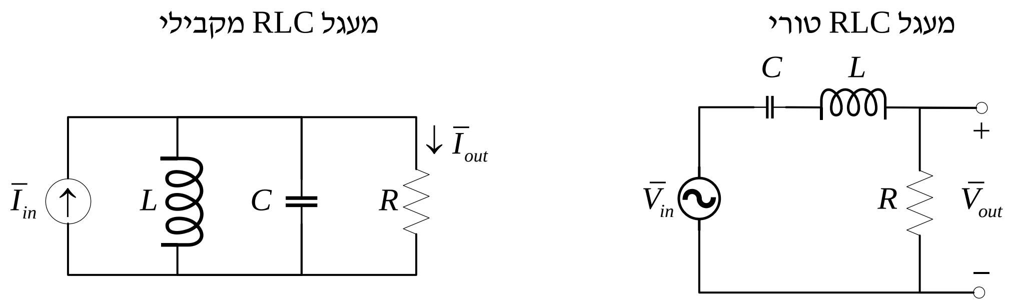
גורם הטיב במעגלי תהודה:

גורם האיכות/הטיב של המעגל (הקרוי גם: Q-Factor) מוגדר היחס שבין האנרגיה הכוללת לאנרגיה המבוזבזת במעגל באופן הבא:

$$Q = 2\pi \frac{\langle W_{\text{Total}} \rangle}{\langle W_{\text{Loss}} \rangle}$$

פונקציות תמסורת של מעגלי RLC:

נתייחס לפונקציות תמסורת יסודיות במעגלי RLC באופן הבא:



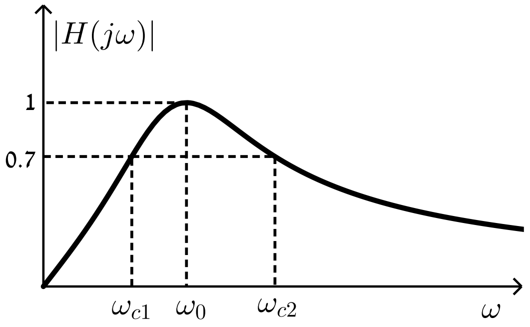
נסמן את היחס במעגל טורי: $H(j\omega) = \frac{\bar{V}_{out}}{\bar{V}_{in}}$ ובמעגל מקבילי: $H(j\omega) = \frac{\bar{I}_{out}}{\bar{I}_{in}}$.

הגודל $H(j\omega)$ הינו פונקציה מרוכבת של התדר והוא קרוי **פונקצית התמסורת של המעגל**.

תדרי מחצית ההספק ורוחב הסרט של מעגל תהודה:

נסמן את תדרי הקצה של פס המעבר של מעגל תהודה ב- ω_{c2} , ω_{c1} (או: f_{c2} , f_{c1}).
נגדיר את רוחב הסרט של פונקצית התמסורת בתור תחום התדרים שבהם יותר ממחצית מהספק הכניסה מועבר לעומס ונקבל:

$$BW = f_{c2} - f_{c1} = \frac{1}{2\pi}(\omega_{c2} - \omega_{c1}) = \frac{1}{2\pi}\frac{R}{L} \ [\text{Hz}]$$



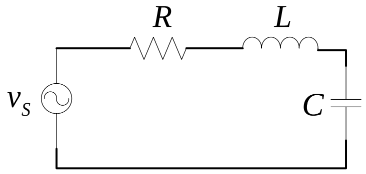
קשר בין תדר התהודה ותדרי הקיטעון במעגל RLC: $\omega_0=\sqrt{\omega_{c1}\cdot\omega_{c2}}$

(וכן כמובן: $f_0=\sqrt{f_{c1}\cdot f_{c2}}$).

סיכום כללי:

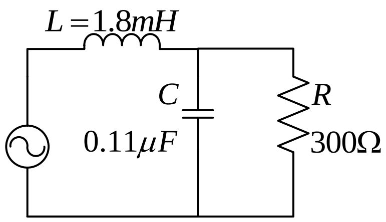
שם	סימון ויחידות	מעגל RLC טורי	מעגל RLC מקבילי
גורם איכות	Q	$\frac{1}{\omega_0 RC}=\frac{\omega_0 L}{R}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\omega_0 RC=\frac{R}{\omega_0 L}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$
תדרי קיטעון	$\omega_{c1},\ \omega_{c2}\ \left[\frac{\text{rad}}{\text{sec}}\right]$	$\pm\frac{R}{2L}+\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2+\omega_0^2}$	$\pm\frac{1}{2RC}+\sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2+\omega_0^2}$
רוחב סרט	$BW\ [\text{Hz}]$	$\frac{1}{2\pi}\frac{R}{L}$	$\frac{1}{2\pi}\frac{1}{RC}$

שאלות:



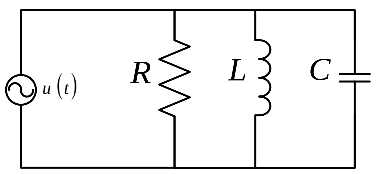
1) לפניך המעגל הבא ובו נתון:
$v_S(t)=10\cos(3000t)$ V , $R=4\Omega$, $L=3$mH .

א. חשב את ערכו של הקבל לקבלת זרם מירבי במעגל עבור תדר הפעולה של מקור הכניסה.
ב. מהו ההספק המירבי של המעגל?
ג. חשב את רוחב הפס של המעגל ואת תדרי הקיטעון.
ד. מהו ה-Q-factor של המעגל?



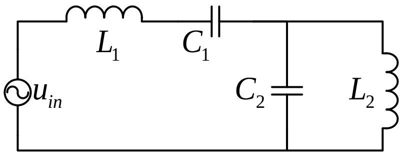
2) באיור שלפניך מתוארים נגד עומס, קבל וסליל המחוברים למחולל זרם חילופין.

א. תדר אות מתח החילופין שמפיק המחולל הוא 11.311kHz. האם המעגל נמצא בתהודה?
ב. כאשר מחולל האות מפיק מתח שהתדר שלו הוא 0 Hz, האם המעגל נמצא בתהודה?



3) לפניך המעגל הבא:
נתון: $R=50\Omega$, $C=0.1\mu$F .
תדר התהודה של המעגל הוא $f_0=15.915$kHz .

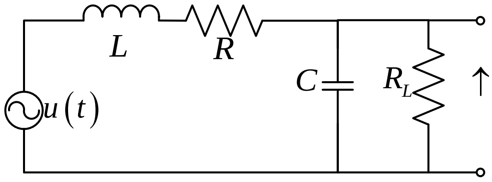
א. מצא את השראות הסליל.
ב. חשב את גורם האיכות של המעגל.
ג. מצא תדרים עבורם עכבת המעגל השקולה קטנה פי 2 מערכה בתהודה.
ד. סרטט גרף של עכבת המעגל כתלות בתדר וסמן בו את תדר התהודה ואת התדרים שמצאת בסעיף הקודם.



4) במעגל הנתון מקור המתח הינו בעל תדירות הניתנת לשינוי.
נתון: $C_1 = 2.2\,\mu\text{F}$, $L_1 = 3\,\mu\text{H}$
$C_2 = 2.2\,\mu\text{F}$, $L_2 = 8\,\mu\text{H}$.

א. באיזו תדירות זוויתית צריכת הזרם תהיה מזערית?
ב. מה היחס בין מתח המקור למתח על L_2 בזמן צריכת זרם מינימלית?

5) מקור המתח שבאיור מפיק מתח: $u(t) = 10\cos(\omega t)$ V .
ערכי רכיבי המעגל הם: $R_L = 500\Omega$, $C = 0.5\,\mu\text{F}$, $L = 5\,\text{mH}$, $R = 10\Omega$.
חשב את התדירות הזוויתית של תהודה ω_0 ואת מתח התהודה $u_0(\omega_0)$.



6) יש לתכנן מעגל מסנן מסוג BPF (מסנן מעביר פס) טורי שאליו מחובר מקור מתח סינוסי בעל אימפדנס פנימי של 120 אוהמים (המחובר למקור בטור).
למוצא המסנן מחובר עומס, במקביל אליו, של $R_L = 375\Omega$. ידוע כי תדר התהודה של המעגל המסנן הוא $40\text{k}\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$,
גורם האיכות הוא 8 וערך הקיבול של המעגל הוא $5\,\text{nF}$.

א. סרטט סכמה כללית של מבנה המעגל.
ב. מצא את ערכי ההתנגדות האוהמית והשראות הסליל של מעגל המסנן.
ג. מצא את גורם האיכות של המערכת הכוללת ואת רוחב הפס שלה.
ד. מחברים במקביל לעומס אלמנט קיבולי שגודלו הוא $10\,\text{nF}$.
i. כיצד הדבר ישפיע על תוצאות סעיף ב'?
ii. כתוב משוואה למציאת תדר התהודה של המערכת כולה ותן פתרון אנליטי שלה. חשב את ערך תדר התהודה עצמו והסבר את התוצאה.
iii. כתוב ביטוי אנליטי לגורם האיכות של המערכת כולה. הבע באמצעות ω_0 במידת הצורך וחשב את ערכו. הסבר את התוצאה.
iv. הסבר באופן איכותי בלבד האם רוחב הסרט במקרה זה גדל או קטן ביחס לרוחב הסרט שחישבת בסעיף ג'.

תשובות סופיות:

1) א. $C = 37\,\mu\text{F}$ ב. $P_{max} = 12.5\,\text{W}$

ג. $f_{c2} = 483.27\,\text{Hz}$, $f_{c1} = 695.48\,\text{Hz}$, $BW = 212.2\,\text{Hz}$ ד. $Q = 2.25$.

2) א. אין תהודה כי לעכבה יש חלק מדומה: $z = (46.151 + 19.686j)\,\Omega$.

ב. אין תהודה כי מדובר במתח DC.

3) א. $L = 1\,\text{mH}$ ב. $Q = 0.5$ ג. $1.72\,\text{kHz}$, $59.37\,\text{kHz}$

ד. ראה גרף בסרטון הוידאו.

4) א. $\omega = 238{,}365\,\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ב. 1.

5) א. $\omega_0 = 19596\,\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ב. $u_{0\max} = 33.33\,\text{V}$.

6) א. ראה סרטוט בסרטון הוידאו.   ב. $L = 125\,\text{mH}$, $R = 625\,\Omega$

ג. $Q_T = 14.11$, $BW = 451.2\,\text{Hz}$ ד. i. לא ישפיע כלל.

ד. ii. $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC - R_{eq}^2 C_L^2}} \approx \dfrac{1}{\sqrt{LC\left(1 + R_{eq}^2 C_L^2\right) - R_{eq}^2 C_L^2 (1 - C)}}$, $\omega_0 = 40.408\,\text{k}\,\dfrac{\text{rad}}{\text{sec}}$

ד. iii. $$Q = \frac{\dfrac{1}{\omega_0 C} + \omega_0 L + \dfrac{1}{\omega_0 C}\dfrac{\left(\omega_0 R_{eq} C_L\right)^2}{1 + \left(\omega_0 R_{eq} C_L\right)^2}}{2R_{in} + \dfrac{2R_{eq}}{1 + \left(\omega_0 R_{eq} C_L\right)^2}} = 10.8$$ (ראה הסבר בסרטון הוידאו).

ד. iv. רוחב הסרט יגדל.