תוכן העניינים:

שימו לב!

החוברת מחולקת לנושאים כפי שמוצגים באתר GOOL.
כל נושא פותח בסיכום תיאורטי קצר ולאחריו דוגמאות – אלו נידונים בהרחבה בסרטוני התיאוריה שבאתר GOOL. לאחר מכן ישנו מגוון תרגילים ברמה עולה בכל אחד מהנושאים – כולם נפתרים באריכות ובפירוט בסרטוני השאלות שבאתר.

פרק 8

מעגלים מסדר שני

פתרון של משוואות דיפרנציאליות מסדר שני:

סיכום כללי:

הקדמה:

אנו נעסוק במשוואות עבור אותות מתח וזרם מהצורה:

- $\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot v(t)=f(t)$ - עבור אות מתח.
- $\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{di(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot i(t)=f(t)$ - עבור אות זרם.

יחידות המקדמים הן: $[\alpha]=[\omega_0]=\frac{rad}{\sec}$.

תנאי התחלה של מד"ר מסדר שני:

- עבור אות מתח: $\frac{dv(0^+)}{dt}=V_0'\left[\frac{\text{V}}{\sec}\right]$; $v(0^+)=V_0\ [\text{V}]$.
- עבור אות זרם: $\frac{di(0^+)}{dt}=I_0'\left[\frac{\text{A}}{\sec}\right]$; $i(0^+)=I_0\ [\text{A}]$.

משוואה הומוגנית - צורה ודרך פתרון:

פתרון משוואה מהצורה:

$$\begin{cases}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=0\\ y(0)=Y_0\\ \frac{dy(0)}{dt}=Y_0'\end{cases}.$$

הפולינום האופייני: $\lambda^2+2\alpha\cdot\lambda+\omega_0^2=0$.

הערה:

במקומות רבים מקובל לסמן S במקום λ. לכן עבור לימודי חשמל, נתייחס לשורשי הפולינום האופייני בתור $S_{1,2}$, אך המשמעות זהה ל- $\lambda_{1,2}$ הידוע מלימודי המתמטיקה.

שורשי הפולינום האופייני, $S_{1,2}$, הם: $S_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}$.

נגדיר: $\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=\alpha_d$ ונכתוב: $S_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha\pm\alpha_d$.

הפתרון בצורתו הכללית ביותר: $y(t)=\frac{e^{-\alpha t}}{\alpha_d}\left(\left(\alpha Y_0+Y_0'\right)\sinh\left(\alpha_d t\right)+\alpha_d Y_0\cosh\left(\alpha_d t\right)\right)$.

מקרה ראשון - ריסון יתר (Over Dumped):

כאן מתקיים: $\alpha>\omega_0$ ולכן α_d ממשי ויש לנו שני פתרונות ממשיים שליליים $S_{1,2}$.

כשנפשט את הביטוי שקיבלנו, הפתרון ההומוגני ייראה: $y_h(t)=Ae^{-S_1 t}+Be^{-S_2 t}$.

מקרה שני – ריסון קריטי (Critical Dumped):

כאן מתקיים: $\alpha=\omega_0$ ולכן $\alpha_d=0$ ממשי ויש לנו פתרון אחד (כפול) $S_1=S_2=S=-\alpha$.

כשנפשט את הביטוי שקיבלנו, הפתרון ההומוגני ייראה: $y_h(t)=Ae^{-St}+Bte^{-St}=e^{-St}(A+Bt)$.

מקרה שלישי – תת ריסון (Under Dumped):

כאן מתקיים: $\alpha<\omega_0$ ולכן α_d הוא מספר מדומה.

נסמן: $\alpha_d=j\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2}\triangleq j\omega_d$ כאשר ω_d נקרא Dumped Radian Frequency.

שורשי הפולינום האופייני, $S_{1,2}$, הם: $S_{1,2}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2}=-\alpha\pm j\omega_d$.

הפתרון ההומוגני ייראה: $y_h(t)=e^{-\alpha t}\left(A\cos(\omega_d t)+B\sin(\omega_d t)\right)$.

סיכום שלבי הפתרון של משוואה דיפרנציאלית הומוגנית מסדר שני:

בהינתן המשוואה הבאה:

$$\begin{cases}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=0\\ y(0)=Y_0\\ \frac{dy(0)}{dt}=Y_0'\end{cases}$$

נמצא את הפתרון לפי השלבים הבאים:

1) כתיבת הפ״א ומציאת שורשיו.
2) כתיבת פתרון הומוגני לפי סוג הריסון.
3) הצבת תנאי ההתחלה בפתרון ההומוגני ובנגזרת הפתרון ההומוגני למציאת ערכי המקדמים.
4) כתיבת הפתרון הסופי.

❖ דוגמא – פתרון משוואה הומוגנית:

פתור את המשוואה הבאה: $\frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{di(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot i(t)=0$ עבור: $i(0^-)=-1\text{A}$

ו- $\frac{di(0^-)}{dt}=2\frac{\text{A}}{\sec}$ כאשר: $\omega_0=\sqrt{13}\frac{\text{rad}}{\sec}$; $\alpha=2\frac{\text{rad}}{\sec}$.

משוואה לא הומוגנית - צורה ודרך פתרון:

משוואה מסדר שני מהצורה הבאה נקראת משוואה לא הומוגנית:

$$\begin{cases}\frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=f(t)\\ y(0^+)=Y_0\\ \frac{dy(0^+)}{dt}=Y_0'\end{cases}$$

פתרון המשוואה יורכב מפתרון פרטי ופתרון הומוגני: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$

כאשר את הפתרון ההומוגני ראינו כיצד למצוא.

ננחש פתרון פרטי לפי הכללים הבאים:

אגף ימין - $f(t)$	ניחוש פתרון - $y_p(t)$
$P_n(t)\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$	$Q_n(t)$
$\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$A\exp(-\alpha t)$
$t\exp(-\alpha t)\ ,\ \alpha>0$	$(At+B)\exp(-\alpha t)$
$\sin(\omega_0 t)$ או $\cos(\omega_0 t)$	$A\sin(\omega_0 t)+B\cos(\omega_0 t)$

שלבים למציאת הפתרון הפרטי וכתיבת הפתרון המלא:

1) גוזרים את הפתרון הפרטי כדי לקבל את הביטויים עבור: $y_p(t)\ ,y_p'(t)\ ,y_p''(t)$ ומציבים אותם במשוואה כדי למצוא את ערכי המקדמים.
2) כותבים פתרון מלא (הומוגני + פרטי) כאשר לחלק ההומוגני יש 2 פרמטרים **חדשים!**
3) מציבים בפתרון המלא את תנאי ההתחלה כדי למצוא את ערכי הפרמטרים של החלק ההומוגני. (הצבה של תנאי ההתחלה של הפונקציה ישירות, וגזירה של הפתרון המלא לקבלת $\frac{dy}{dt}$ כדי להציב בו את תנאי ההתחלה השני).
4) כותבים את הפתרון המלא: $y(t)=y_h(t)+y_p(t)$.

פתרון משוואה לפי ZIR ו-ZSR:

גם במשוואות מסדר שני, נפתור משוואות ע"י חלוקתן ל-ZIR ול-ZSR.
בהינתן המשוואה:

$$\begin{cases}\dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=f(t)\\ y(0^+)=Y_0\\ \dfrac{dy(0^+)}{dt}=Y_0'\end{cases}$$

נחלק את הפתרון באופן הבא:

$\underline{y_{ZSR}(t)}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=f(t) \\ y(0^+)=0 \\ \dfrac{dy(0^+)}{dt}=0 \end{cases}$$

$$\boxed{y_{ZSR}(t)=y_h(t)+y_p(t)}$$

$\underline{y_{ZIR}(t)}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\dfrac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=0 \\ y(0^+)=Y_0 \\ \dfrac{dy(0^+)}{dt}=Y_0' \end{cases}$$

$$\boxed{y_{ZIR}(t)=y_h(t)}$$

כאשר: $y(t)=y_{ZIR}(t)+y_{ZSR}(t)$.

הערות:

יש לזכור את העקרונות הבאים:

1) עקרון חיבור של פתרונות ZSR.

2) עקרון איזון הלמים.

3) עקרון ליניאריות והזזה בזמן של מערכות LTI:

אם הפתרון $v_{ZSR}(t)$ מתקבל עבור עירור כניסה $f(t)$ אז:

א. $Av_{ZSR}(t)$ הוא הפתרון של מד"ר עבור כניסה של $Af(t)$.

ב. $\dfrac{dv_{ZSR}(t)}{dt}$ הוא הפתרון של מד"ר עבור כניסה של $\dfrac{df(t)}{dt}$.

ג. $\int_{-\infty}^{t} v_{ZSR}(x)dx$ הוא פתרון של מד"ר עבור כניסה של $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$.

ד. $v_{ZSR}(t-T_0)$ הוא פתרון של מד"ר עבור כניסה של $f(t-T_0)$.

איזון הלמים במשוואה מסדר שני:

פתרון ZSR של משוואה מסדר שני עם כניסת הלם יתורגם בצורה הבאה:

$$\begin{cases} \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=C\cdot\delta(t) \\ y(0^-)=0 \\ \frac{dy(0^-)}{dt}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2y(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot y(t)=0 \\ y(0^+)=0 \\ \frac{dy(0^+)}{dt}=C \end{cases}$$

מכאן שהפתרון יהיה הפתרון ההומוגני בלבד.

❖ **דוגמא מסכמת:**

פתור את המשוואה הבאה עבור $\alpha=\omega_0=12\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$:

$$\begin{cases} \frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\alpha\cdot\frac{dv(t)}{dt}+\omega_0^2\cdot v(t)=\tau^2V_0\,\delta(t)+2V_0\cdot\tau\cdot(t-1)e^{1-t}u(t-1) \\ v(0^-)=0\ \text{V} \\ \frac{dv(0^-)}{dt}=2\ \frac{\text{V}}{\text{sec}} \end{cases}$$

שאלות:

1) נתונה המד"ר הבאה: $i''+2\alpha\cdot i'+\omega_0^2\cdot i=0$ כאשר $\omega_0=2\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=2.5\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

תנאי ההתחלה הם: $i\left(0^-\right)=2\text{A}$, $i'\left(0^-\right)=1\frac{\text{A}}{\text{sec}}$.

א. האם יש למשוואה פתרונות ZIR ו-ZSR? אם כן מצא אותם.

ב. מצא את $i(t)$.

2) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=0$.

א. מצא את $v(t)$ עבור: $\omega_0=\sqrt{10}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$

ו- $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-120\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=35\text{mV}$.

ב. מצא את $v(t)$ עבור: $\alpha=\omega_0=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

ו- $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-120\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=35\text{mV}$.

3) מצא את הפתרון של המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=e^{-3t}u(t)$

אם ידועים: $\omega_0=\sqrt{5}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=3\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=10\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=1\text{V}$.

4) חזור על שאלה 3 עם: $\omega_0=2.5\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=\sqrt{6}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

5) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=3\delta(t)-e^{-4t}u(t)+\cos(2t)u(t)$.

כמו כן: $\omega_0=\sqrt{3}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=2\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=65\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=1\text{V}$.

א. מצא את תנאי ההתחלה עבור $t=0^+$, כלומר: $\frac{dv}{dt}\left(0^+\right)$, $v\left(0^+\right)$.

ב. מצא את $v_{ZIR}(t)$, את $v_{ZSR}(t)$.

ג. מצא את $v(t)$.

6) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=3\left(u(t)-u(t-10)\right)$.

נתון כי: $\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=6\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-70\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=2.4\text{V}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $v(t)$.

7) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2v}{dt^2}+2\alpha\frac{dv}{dt}+\omega_0^2v=f(t)$ כאשר: $f(t)=\sum_{k=0}^{N}u(t-k)$.

נתון כי: $\alpha=\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{dv}{dt}\left(0^-\right)=-7\frac{\text{V}}{\text{sec}}$, $v\left(0^-\right)=1\text{V}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $v(t)$ כתלות ב- N.

8) נתונה המד"ר הבאה: $\frac{d^2i}{dt^2}+2\alpha\frac{di}{dt}+\omega_0^2i=f(t)$ כאשר: $f(t)=\sum_{k=0}^{N}\delta(t-k)$.

נתון כי: $\alpha=\omega_0=10\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ וכן: $\frac{di}{dt}\left(0^-\right)=-7\frac{\text{A}}{\text{sec}}$, $i\left(0^-\right)=1\text{A}$.

היעזר בתכונות הליניאריות של פתרון ZSR ומצא את $i(t)$ כתלות ב- N.

תשובות סופיות:

1) א. + ב. יש למשוואה רק פתרון ZIR : $i(t)=i_{ZIR}(t)=\left(-e^{-4t}+3e^{-t}\right)u(t)$.

2) א. $v(t)=e^{-t}\left(35m\cos 3t-39.98\sin 3t\right)u(t)$

ב. $v(t)=e^{-t}\left(35m-119.96t\right)u(t)$.

3) $v(t)=\left(-2\frac{5}{8}e^{-5t}+3\frac{7}{8}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}\right)u(t)$.

4) $v(t)=\left[e^{\sqrt{6}t}\left(-0.8\cos\frac{1}{2}t+26.8\sin\frac{1}{2}t\right)+1.8e^{-3t}\right]u(t)$.

5) א. $v(0^+)=1\text{V}\ ,\ v'(0^+)=68\frac{\text{V}}{\text{sec}}$ ב. $v_{ZIR}(t)=\left[35.5e^{-t}-34.5e^{-3t}\right]u(t)$

$$v_{ZSR}(t)=\left[\frac{37}{30}e^{-t}-\frac{23}{26}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{1}{65}(8\sin 2t-\cos 2t)\right]u(t)$$

ג. $v(t)=\left[36\frac{11}{15}e^{-t}-35\frac{5}{13}e^{-3t}-\frac{1}{3}e^{-4}+\frac{1}{65}(8\sin 2t-\cos 2t)\right]u(t)$.

6)
$$\begin{aligned}v(t)=&\left[e^{-6t}\left(2.37\cos 8t-6.92\sin 8t\right)+0.03\right]u(t)\\&-3m\left[e^{-6(t-10)}\left(7.5\sin\left(8(t-10)\right)-10\cos\left(8(t-10)\right)\right)+10\right]u(t-10)\end{aligned}$$.

7) $v(t)=e^{-10t}(1+3t)u(t)+\sum_{k=0}^{N}\left(-e^{-10(t-k)}\left[0.01+0.1(t-k)\right]+0.01\right)u(t-k)$.

8) $i(t)=e^{-10t}(1+3t)u(t)+\sum_{k=0}^{N}(t-k)e^{-10(t-k)}u(t-k)$.

ניתוח מעגלים מסדר שני:

סיכום כללי:

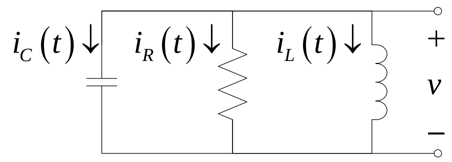
סוגי מעגלים מסדר שני:

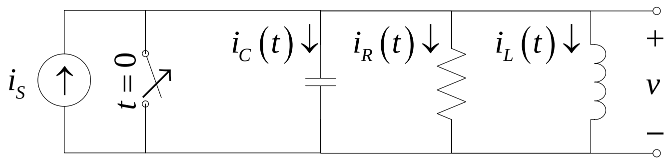
ניתן לחלק את מעגלים מסדר שני לשני סוגים:

1) מעגל RLC טורי - בו הקבל והסליל נמצאים בטור זה עם זה.

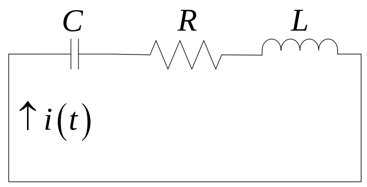
2) מעגל RLC מקבילי - בו הקבל והסליל נמצאים בענפים המקבילים זה לזה.

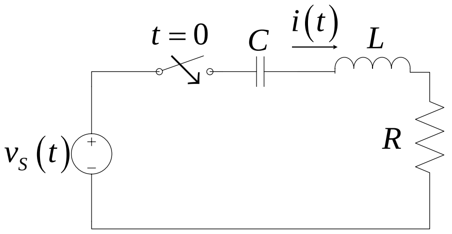
מעגל RLC מקבילי



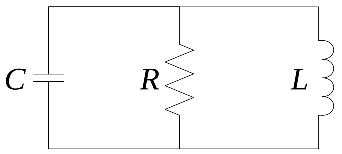


מעגל RLC טורי





❖ **דוגמה - ניתוח מעגל ללא עירור:**



לפניך מעגל RLC מקבילי יסודי ללא עירור חיצוני.

ידוע כי: $i_L(t=0)=I_0$,$v_C(t=0)=V_0$.

א. כתוב משוואה מתאימה עבור $i_L(t)$ לכל t והבע את α ואת ω_0 באמצעות רכיבי המעגל.

ב. מה יהיה פתרון המשוואה כאשר $R\to\infty$?

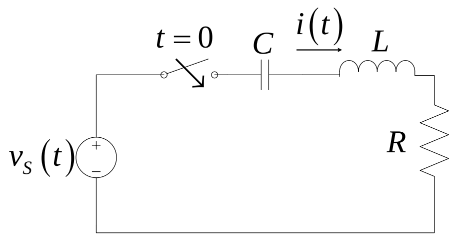
ג. כעת נניח כי R הוא בעל ערך סופי.
כתוב תנאים עבור:

i. ריסון יתר - $\alpha>\omega_0$.

ii. ריסון קריטי - $\alpha=\omega_0$.

iii. תת-ריסון - $\alpha<\omega_0$ (הגדר את ω_d במקרה זה).

ד. מצא את $i_L(t)$ עבור תת ריסון.



❖ דוגמא - ניתוח מעגל עם עירור חיצוני:

לפניך מעגל RLC טורי יסודי הכולל עירור חיצוני
של: $v_S(t)=\frac{V_0\tau^2}{2}\exp\left\{-\frac{t}{\tau}\right\}u(t)$.
(בזמן $t=0$ סוגרים את המפסק) וידוע כי:
$i(t=0^-)=1\text{A}\ ,\ v_L(t=0^-)=2\text{V}$.

א. כתוב משוואה מתאימה עבור $i(t)$ לכל t והבע את α ואת ω_0 באמצעות רכיבי המעגל.

ב. מצא את $i(t)$ עבור הערכים הבאים: $R=3.5\Omega\ ,\ L=0.5\text{H}\ ,\ C=0.2\text{F}$.
נתון בנוסף: $V_0=16\text{V}\ ,\ \tau=1\sec$.

סיכום מקדמים של מעגלים:

- במעגל RLC טורי קיבלנו: $\alpha=\frac{R}{2L}\ ;\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$
- במעגל RLC מקבילי קיבלנו: $\alpha=\frac{1}{2RC}\ ;\ \omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$.

גורם האיכות:

גודל חסר יחידות המתאר את היחס שבין האוסילציות של אות המוצא ומעטפת הדעיכה המעריכית שלה ומוגדר באופן הבא: $Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}$.

- במעגל RLC מקבילי נקבל: $Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{RC}{\sqrt{LC}}=R\sqrt{\frac{C}{L}}$.
- במעגל RLC טורי נקבל: $Q=\frac{\omega_0}{2\alpha}=\frac{L}{R\sqrt{LC}}=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

גורם האיכות מחלק את סוגי פתרונות המעגל באופן הבא:

1) בריסון יתר מתקיים $\alpha>\omega_0$ ולכן: $Q<\frac{1}{2}$.

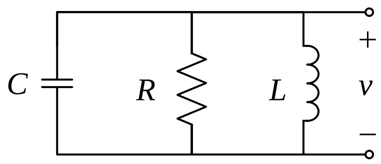
2) בריסון קריטי מתקיים $\alpha=\omega_0$ ולכן: $Q=\frac{1}{2}$.

3) בתת ריסון מתקיים $\alpha<\omega_0$ ולכן: $Q>\frac{1}{2}$.

שאלות:

1) לפניך המעגל RLC המקבילי הבא ובו:

$R = 200\Omega$, $L = 50\text{mH}$, $C = 0.2\mu\text{F}$.



ענה על השאלות הבאות:

א. מצא את שורשי המשוואה האופיינית של המעגל.

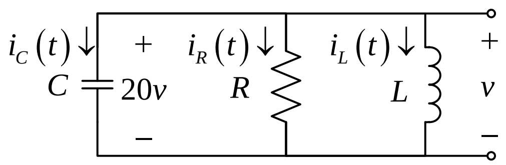
ב. מהו סוג הריסון של המעגל?

ג. חזור על סעיפים א' ו-ב' עם: $R = 312.5\Omega$.

ד. מצא עבור איזה ערך של R המעגל ימצא בריסון קריטי.

2) לפניך המעגל RLC המקבילי הבא ובו נתון כי קיבול הקבל הוא: $0.05\mu\text{F}$ והמתח ההתחלתי עליו הוא 20V . כמו כן הזרם ההתחלתי בסליל הוא אפס ואות המתח עבור $t \geq 0$ הוא:

$v(t) = -5e^{-5000t} + 20e^{-20000t}\,[\text{V}]$.



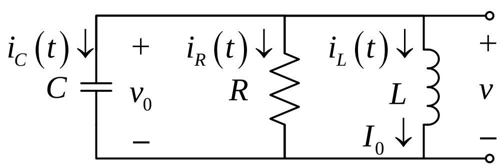
ענה על השאלות הבאות:

א. מצא את הערכים של R , L , α ו- ω_0 .

ב. חשב את האותות: $i_R(t)$, $i_L(t)$ ו- $i_C(t)$ עבור $t \geq 0^+$.

3) התגובה הטבעית של המעגל המתואר היא:

$v(t) = 150e^{-8000t}(\cos 6000t - 2\sin 6000t)[\text{V}]$, $t \geq 0$.

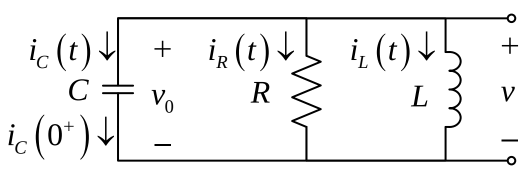


ערך קיבול הקבל הוא $0.05\mu\text{F}$.

מצא את השראות הסליל, L , התנגדות הנגד, R , המתח ההתחלתי, v_0 , הזרם ההתחלתי בסליל, I_0 ואות הזרם בסליל $i_L(t)$ עבור $t \geq 0^+$.

4) המתח ההתחלתי במעגל המתואר בסמוך הוא אפס. דרך הקבל ישנו זרם התחלתי $i_C(0^+) = 15\text{mA}$. אות הזרם בקבל הוא: $t \geq 0^+$, $i_C(t) = A_1e^{-160t} + A_2e^{-40t}\,[\text{A}]$.

ערך הנגד הוא 200Ω .

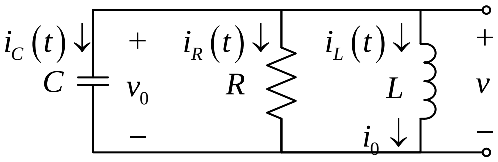


א. מצא את α , ω_0 , L , C , A_1 ו- A_2 .

ב. מצא את האות $v(t)$ עבור $t \geq 0$.

ג. מצא את האות $i_R(t)$ עבור $t \geq 0$.

ד. מצא את האות $i_L(t)$ עבור $t \geq 0$.



5) הנתונים עבור המעגל שלפניך הם:

$R=5\Omega, L=1\text{H}, C=0.1\text{F}$

$v_0=0\text{V}\ ,\ i_0=-5\text{A}$.

א. כתוב את הביטוי של $v(t)$ עבור $t\ge 0$.

ב. מצא את שלושת הערכים הראשונים המקיימים: $\frac{dv}{dt}=0$.

סמן את ערכים אלו ב- $t_3\ ,\ t_2\ ,\ t_1$.

ג. הראה כי:

i. $t_3-t_1=T_d$.

ii. $t_2-t_1=0.5T_d$.

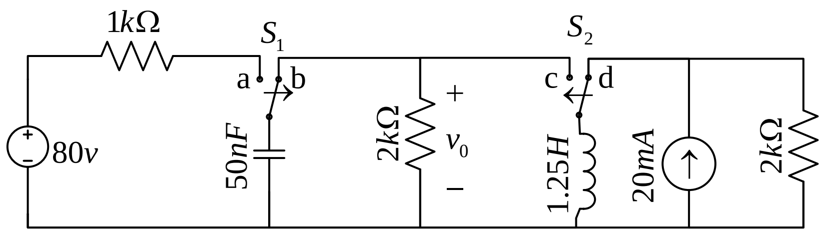
ד. חשב את: $v(t_k)$ לכל $k=1\ ,\ 2\ ,\ 3$.

ה. צייר את הגרף של $v(t)$ בתחום $0\le t\le t_2$.

ו. כעת מסירים את הנגד R מהמעגל.

מצא את $v(t)$, את התדר שלו ואת האמפליטודה שלו.

6) במעגל שלפניך ישנם שני מפסקים אשר מסונכרנים יחדיו באופן הבא: כאשר מפסק 1 במצב a, המפסק השני במצב d, וכאשר מפסק 1 עובר למצב b, מפסק 2 עובר למצב c. מניחים כי מפסק 1 היה במצב a במשך הרבה זמן.
ברגע $t=0$ מעבירים אותו למצב b.



א. כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\ge 0$.

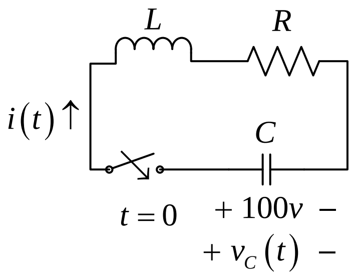
ב. משנים את ערכי הנגד והסליל ל- $R=2.5\text{k}\Omega\ ,\ L=0.8\text{H}$.

כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\ge 0$.

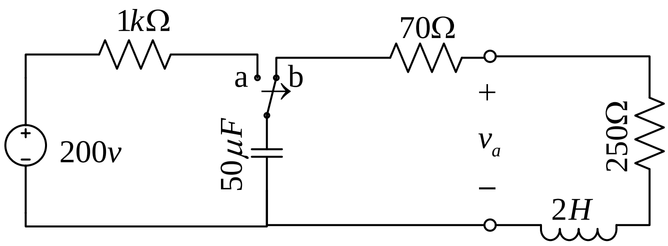
ג. משנים את ערכי הנגד והסליל ל- $R=1\text{k}\Omega\ ,\ L=0.2\text{H}$.

כתוב את $v_0(t)$ עבור $t\ge 0$.

7) במעגל שלפניך סוגרים את המפסק ב- $t=0$.
ידוע: $L=0.1\text{H}$, $C=0.1\mu\text{F}$, $R=560\Omega$.
המתח האגור בקבל הוא: $v_C\left(0^-\right)=100\text{V}$.
מצא את $v_C(t)$ ואת $i(t)$ עבור $t\geq0$.

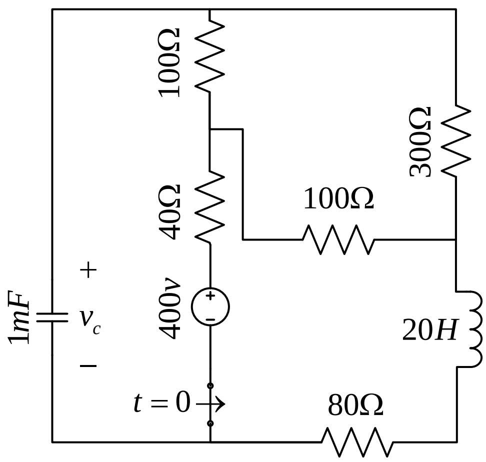


8) המפסק במעגל הבא נמצא בנקודה a במשך הרבה זמן.
בזמן $t=0$ מעבירים אותו למצב b כמתואר באיור:

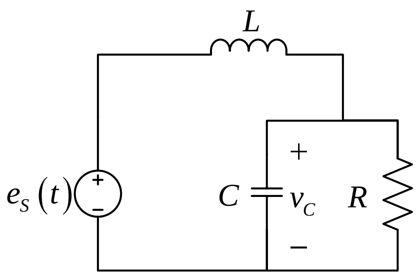


א. מהם הערכים ההתחלתיים של v_a ושל $\frac{dv_a}{dt}$?
ב. מצא את $v_a(t)$ עבור $t\geq0$.

9) במעגל שלפניך מחזיקים את מפסק סגור במשך הרבה זמן וברגע $t=0$ פותחים אותו.
כל הערכים כתובים בסרטוט. מצא את $v_C(t)$ עבור $t\geq0$.



10) לפניך המעגל הבא:



נתון כי: $\omega_0=\sqrt{5}\,\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ו- $\alpha=1\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

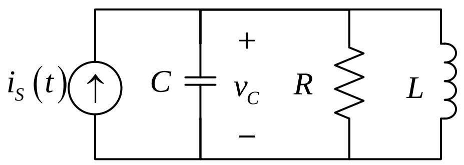
מקור הכניסה $e_S(t)$ הוא מקור מתח
אשר יכול לקבל צורות פולס שונות.
הנח כי אין אנרגיה התחלתית אגורה ברכיבים.

א. כתוב את המשוואה הדיפרנציאלית המתארת את הקשר שבין מתח הכניסה $e_S(t)$ למתח המוצא הרצוי $v_C(t)$.

ב. מצא את תגובת $v_C(t)$ כאשר מקור הכניסה הוא מדרגה, ז"א: $e_S(t)=u(t)$.

ג. מצא את תגובת $v_C(t)$ כאשר מקור הכניסה הוא רמפה, ז"א: $e_S(t)=tu(t)$.

11) במעגל שלפניך נתונים הערכים הבאים:



$R=25\text{k}\Omega$, $Q=\frac{1}{2}$, $\omega_0=20\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$.

מקור הזרם הוא: $i_S(t)=\cos(3t)u(t)$.

א. כתוב משוואה דיפרנציאלית המקשרת בין המתח בקבל $v_C(t)$ לבין זרם המקור $i_S(t)$.

ב. מניחים את תנאי ההתחלה הבאים: $i_L(0^-)=i_0$ ו- $v_C(0^-)=v_0$.
כתוב את פתרון ZIR של המד"ר מסעיף א' (הבע באמצעות v_0,i_0).

ג. מצא את פתרון ZSR של המד"ר מסעיף א' והסבר מה היה משתנה בפתרון זה אם במקום $i_S(t)=\cos(3t)u(t)$ היה העירור $i_S(t)=\sin(3t)u(t)$.

ד. מצא ערכים v_0,i_0 עבורם לא יהיו גורמים דועכים בתגובה $v_C(t)$.

12) בשאלה זו נתרגל את תכונות הליניאריות של פתרון ZSR.
נתון מעגל כלשהו מסדר שני שבו כל הרכיבים הם ליניאריים וקבועים בזמן.

- ידוע כי עבור כניסת עירור: $i_1(t)=\cos(4t)u(t)$
מתקבלת תגובת ZSR של המוצא: $v_1(t)=\left[e^{-t}+3e^{-4t}+\cos\left(4t+45^\circ\right)\right]u(t)$.
- כמו כן עבור עירור של $i_2(t)=5\cos(4t)u(t)$ מתקבלת התגובה המלאה
הבאה של המעגל: $v_2(t)=\left[e^{-t}+6e^{-4t}+4\cos\left(4t+45^\circ\right)\right]u(t)$.

מצא את תגובת המעגל המלאה $v_3(t)$ עבור עירור של $i_3(t)=8\cos(4t)u(t)$.

13) במעגל RLC מקבילי שבו כל הרכיבים עם ליניאריים וקבועים בזמן ידוע כי עבור עירור של $i_1(t)=\sin(t)u(t)$ מתקבלת התגובה המלאה הבאה:

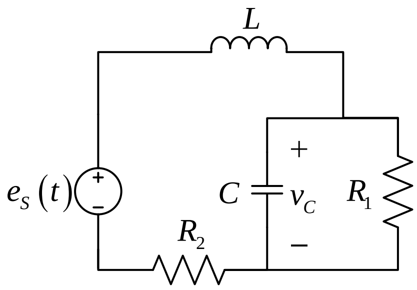
$v_1(t)=\left[e^{-2t}+e^{-3t}+\frac{1}{2}\cos(t)\right]u(t)$. ועבור עירור של $i_2(t)=3\sin(t)u(t)$

מתקבלת תגובת ZSR הבאה: $v_2(t)=\left[3e^{-2t}+\frac{1}{3}e^{-3t}+\frac{1}{5}\cos(t)\right]u(t)$

א. מצא את תגובת המעגל המלאה לעירור: $i_4(t)=\cos(t)u(t)$.

ב. מצא את תגובת המעגל המלאה לעירור: $i_5(t)=\cos(t-2)u(t-2)$.

14) לפניך המעגל הבא:



מתח המקור מסומן ב- $e_S(t)$ ותגובת המעגל נמדדת על פני הקבל ומסומנת $v_C(t)$.

נתוני הרכיבים הם:

$R_1=4\text{k}\Omega$, $R_2=1\text{k}\Omega$, $L=1\text{kH}$, $C=0.25\text{mF}$.

א. חשב את תגובת המעגל לכניסת הלם, $h(t)$.

ב. חשב את התגובה המלאה להלם תחת תנאי ההתחלה הבאים: $i_L(0^+)=1\text{mA}$ ו- $v_C(0)=2\text{V}$.

תשובות סופיות:

1) א. $S_1=-5000\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $S_2=-20,000\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ ב. ריסון יתר.

ג. $S_{1,2}=-8000\pm 6000j\ \frac{\text{rad}}{\text{sec}}$ תת ריסון. ד. $R=250\Omega$.

2) א. $\omega_0=10\text{k}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\alpha=12.5\text{k}\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $L=0.2\text{H}$, $R=800\Omega$

ב. $i_R(t)=\left[-6.25e^{-5000t}+25e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

$i_C(t)=\left[1.25e^{-5000t}-20e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

$i_L(t)=\left[5e^{-5000t}-5e^{-20,000t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

3) $L=0.2\text{H}$, $R=1.25\text{k}\Omega$, $v_0=150\text{V}$, $I_0=30\text{mA}$

$i_L(t)=195e^{-8000t}\left(2\sin 6000t-\cos 6000t\right)\ \ \text{mA}$.

4) א. $\alpha=100\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $\omega_0=80\frac{\text{rad}}{\text{sec}}$, $L=6.25\text{H}$, $C=25\mu\text{F}$, $A_2=-5\text{mA}$, $A_1=20\text{mA}$

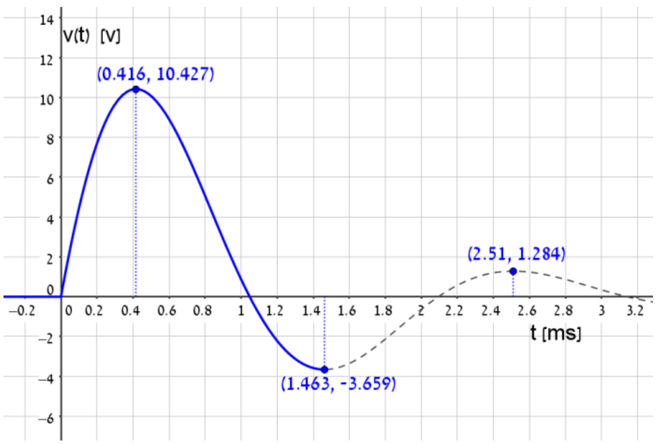
ב. $v(t)=\left[-5e^{-160t}+5e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{V}]$

ג. $i_R(t)=\left[-25e^{-160t}+25e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$

ד. $i_L(t)=\left[5e^{-160t}-20e^{-40t}\right]u(t)\ \ [\text{mA}]$.

5) א. $v(t)=\left[16\frac{2}{3}e^{-t}\sin 3t\right]u(t)\ \ [\text{V}]$ ב. $t_1=416\text{ms}$, $t_2=1463\text{ms}$, $t_3=2510\text{ms}$

ד. $v(t_1)=10.43\text{V}$, $v(t_2)=-3.66\text{V}$, $v(t_3)=0.798\text{V}$ ה. להלן סרטוט:



ו. $A=15.8\text{V}$, $f=0.5\text{Hz}$.

6) א. $v_0(t)=\left[173\frac{1}{3}e^{-8000t}-93\frac{1}{3}e^{-2000t}\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

ב. $v_0(t)=e^{-4000t}\left(80\cos(3000t)-720\sin(3000t)\right)u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

ג. $v_0(t)=\left[80e^{-10^4 t}-1.2\cdot10^6 te^{-10^4 t}\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

7) $v_C(t)=\left[100\cos(9600t)+29.17\sin(9600t)\right]e^{-2800t}u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

$i(t)=0.104e^{-2800t}\sin(9600t)u(t)\ \ [\mathrm{A}]$.

8) א. $v_a=200\mathrm{V}\ ,\ \frac{dv_a}{dt}=-7000\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{sec}}$

ב. $v_a(t)=50e^{-80t}\left[4\cos60t+3\sin60t\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

9) $v_C(t)=\left[280e^{-5t}\cos5t-120e^{-5t}\sin5t\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

10) א. $\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+2\frac{dv_C(t)}{dt}+5v_C(t)=5e_S(t)$

ב. $v_C(t)=\left[1-e^{-t}\left(\cos2t+\frac{1}{2}\sin2t\right)\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

ג. $v_C(t)=\left[e^{-t}(0.4\cos2t-0.3\sin2t)+t-0.4\right]u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.

11) א. $\frac{d^2v_C(t)}{dt^2}+40\frac{dv_C(t)}{dt}+400v_C(t)=10^6\frac{di(t)}{dt}$

ב. $v_{ZIR}(t)=e^{-20t}\left(v_0-t\left(10^6 i_0+20v_0\right)\right)\ ;\ t\geq0$

ג. $v_{ZSR}(t)=10^3(2.15\cos3t-7\sin3t)-3.05\cdot10^6te^{-20t}\ ;\ t\geq0$.

במקרה של החלפת עירור נקבל איבר אחד בפתרון $v_{ZSR}(t)$ ולא תהיה אי רציפות ב-0.

ד. $v_0=2.15\mathrm{kV},\ i_0=-3\mathrm{A}$.

12) $v_3(t)=4e^{-t}+15e^{-3t}+7\cos(4t+45°)\ \ [\mathrm{V}]$.

13) א. $v_4(t)=\left(-2e^{-2t}-3e^{-3t}-\frac{1}{2}\sin t\right)u(t)\ \ [\mathrm{V}]$

ב. $v_5(t)=\left(-2e^{-2(t-2)}-3e^{-3(t-2)}-\frac{1}{2}\sin(t-2)\right)u(t-2)\ \ [\mathrm{V}]$.

14) א. $h(t)=0.4e^{-t}(3\sin2t+4\cos2t)u(t)$

ב. $v_C(t)=e^{-t}(5.2\sin2t+3.6\cos2t)u(t)\ \ [\mathrm{V}]$.