

ערכים עצמיים, וקטורים עצמיים, לכסון

שאלות

עבור כל אחת מהמטריצות בשאלות 1-4 מצא ערכים עצמיים ו-וקטורים עצמיים :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$(5) \quad \text{עבור המטריצה } A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

- א. מצא מטריצה אופיינית.
- ב. מצא פולינום אופייני.
- ג. מצא ערכים עצמיים ואת הריבוב האלגברי של כל ערך עצמי.
- ד. מצא מרחבים עצמיים ואת הריבוב הגיאומטרי של כל ערך עצמי.
- ה. מצא וקטורים עצמיים.
- ו. קבע האם המטריצה ניתנת ללכסון.
- ז. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, לכסן אותה.
כלומר, מצא מטריצה הפיכה P , כך ש- $P^{-1}AP = D$, כאשר D מטריצה אלכסונית.
- ח. במידה והמטריצה ניתנת ללכסון, חשב A^{2009} .
- ט. מצא את הפולינום המינימלי.
- י. קבע האם המטריצה הפיכה לפי ערכיה העצמיים.
במידה והמטריצה הפיכה, בטא את A^{-1} בעזרת A ו- I בלבד,
תוך שימוש במשפט קיילי המילטון.

$$(6) \text{ נתון } A = \begin{pmatrix} k-2 & 2k & k+1 \\ k-1 & -1 & 2 \\ -k & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

לאיזה ערך של הפרמטר k המספר 2 יהיה ערך עצמי של המטריצה A ?

$$(7) \text{ נתונה המטריצה הממשית } A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -8 & -5 \end{pmatrix}$$

- א. מצאו את ערכי a ו- b , עבורם הערכים העצמיים של A יהיו 1 ו-1 - **בלבד**.
 ב. עבור ערכי a ו- b שמצאת בסעיף א, קבע האם המטריצה לכסינה.

(8) תהי A מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 .

ידוע כי הווקטורים העצמיים של המטריצה הם $v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

והם מתאימים לערכים העצמיים: $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -4$.

מצא את המטריצה A .

(9) קבע האם קיימת מטריצה ממשית ריבועית מסדר 3×3 , בעלת וקטורים עצמיים

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$, המתאימים לערכים העצמיים: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

במידה וקיימת מטריצה כזאת, מצא אותה.

(10) הוכח או הפרך:

- א. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא הפיכה.
 ב. כל מטריצה הניתנת ללכסון היא לא הפיכה.
 ג. כל מטריצה הפיכה ניתנת ללכסון.

ד. קיימת מטריצה A אשר הווקטור $\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$ הוא ו"ע שלה השייך לע"ע 14.

11) נתונה מטריצה ריבועית A . הוכח או הפרך :

א. 0 ערך עצמי של המטריצה A , אם ורק אם המטריצה איננה הפיכה.

ב. אם A הפיכה ו- λ ע"ע של A , אז $\frac{1}{\lambda}$ הוא ערך עצמי של A^{-1} .

ג. ל- A ול- A^T יש את אותו פולינום אופייני.

ד. ל- A ול- A^T יש את אותם וקטורים עצמיים.

ה. אם סכום האיברים בכל שורה של A הוא λ , אז λ הוא ע"ע של A .

ו. אם $A^{-1} = A^T$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = \pm 1$.

ז. אם $A^2 = A$ ואם λ הוא ע"ע של A , אז $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$.

תשובות סופיות

(1) ערכים עצמיים: $x_1 = 2, x_{2,3} = 3$

וקטורים עצמיים: $v_{x=3}^{(1)} = (1, 0, 1), v_{x=3}^{(2)} = (1, 1, 0), v_{x=2} = (1, 1, 1)$

(2) $v_{x=-2} = (-1, 1, 1), v_{x=3} = (1, 2, 1), v_{x=1} = (-1, 4, 1), x = 1, x = 3, x = -2$

(3) $v_{x=-1} = (-1, 0, 1), v_{x=4} = (1, 1, 1), v_{x=1} = (1, -2, 1), x = 1, x = 4, x = -1$

(4) $v_{x=3} = (1, 2), v_{x=1} = (-1, 2), x = -1, x = 3$

(5) א.
$$\begin{bmatrix} x+1 & -3 & 0 \\ -3 & x+1 & 0 \\ 2 & 2 & x-6 \end{bmatrix}$$
 ב. $p(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$

ג. $x = 6, x = 2, x = -4$

$x = -4$ – ריבוב אלגברי: 1, $x = 2$ – ריבוב אלגברי: 1, $x = 6$ – ריבוב אלגברי: 1.

ד. $V_{x=6} = sp\{(0, 0, 1)\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=2} = sp\{(1, 1, 1)\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

$V_{x=-4} = sp\{(-1, 1, 0)\}$ – ריבוב גיאומטרי: 1.

ה. $\langle 0, 0, 1 \rangle, \langle -1, 1, 0 \rangle, \langle 1, 1, 1 \rangle$ ו. ניתנת ללכסון. ז. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

ט.
$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2^{2017} + (-4)^{2017} & 2^{2017} - (-4)^{2017} & 0 \\ 2^{2017} - (-4)^{2017} & 2^{2017} + (-4)^{2017} & 0 \\ -6^{2017} + 2^{2017} & -6^{2017} + 2^{2017} & 2 \cdot 6^{2017} \end{bmatrix}$$
 ח.

$m(x) = (x-6)(x-2)(x+4)$

י. הפיכה.

(6) $k_1 = 3, k_2 = -\frac{32}{9}$

(7) א. $a = 3, b = -4$ או $a = 1, b = 0$ ב. לא לשתייהן.

(8)
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$$

(9) אין כזו מטריצה.

(10) א. הפרכה: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ב. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ ג. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ד. הוכחה.

(11) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. הוכחה. ד. הפרכה.

ה. הוכחה. ו. הוכחה. ז. הוכחה.