מרחבי מכפלה פנימית ומרחבים נורמיים

מרחב מכפלה פנימית:

מרחב וקטורי V ייקרא מרחב מכפלה פנימית אם משוייכת לו פונקציה המתאימה לכול זוג וקטורים סקלר.

פונקציה זו נקראת מכפלה פנימית ומסומנת כך $\langle u,v\rangle$.

אנו דורשים שהיא תקיים את התכונות הבאות:

לכל $u,v\in V$ ו - α סקלר

(1) $\langle u+w,v\rangle=\langle u,v\rangle+\langle w,v\rangle$ ו - $\langle \alpha\cdot u,v\rangle=\alpha\cdot\langle u,v\rangle$ (לינאריות ברכיב השמאלי)

(2) $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$

(3) $\langle u,u\rangle\ge 0$

$u=0 \;\Leftrightarrow\; \langle u,u\rangle=0$

מרחב נורמי:

מרחב וקטורי V ייקרא מרחב נורמי אם משוייכת לו פונקציה המתאימה לכל וקטור מספר ממשי אי – שלילי. אנו דורשים שהיא תקיים את התכונות הבאות:

לכל $u\in V$ ו - α סקלר

(1) $\|u\|\ge 0$ (אי שליליות)

$u=0 \;\Leftrightarrow\; \|u\|=0$ (הוקטור היחיד שהנורמה שלו היא אפס זה וקטור האפס)

(2) $\|\alpha v\|=|\alpha|\|u\|$ (ניתן להוציא סקלר החוצה עם ערך מוחלט)

(3) $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$ (אי שיוויון המשולש)

הערות:

א) כל מרחב מכפלה פנימית הוא גם מרחב נורמי כאשר מגדירים $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ וזו נקראת הנורמה המושרית מן המכפלה הפנימית. כלומר, בהינתן מכפלה פנימית תמיד ניתן לייצר נורמה.

ב) לא כל מרחב נורמי הוא גם מרחב מכפלה פנימית. כלומר, בהינתן נורמה $\|u\|$ לא תמיד קיימת מכפלה פנימית $\langle u,v\rangle$ כך שמתקיים הקשר $\|u\|=\sqrt{\langle u,u\rangle}$ לכל וקטור u במרחב.

מרחבים נפוצים

1) $L^2_{PC}[a,b]$ - מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$. מכפלה זו משרה את הנורמה $\|f\|=\sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\,dx}$

2) $L^1_{PC}[a,b]$ - מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$ עם הנורמה

$$\|f\|=\int_a^b |f(x)|\,dx$$

3) $L^2_{PC}(-\infty,\infty)$ - מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $(-\infty,\infty)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$ והמכפלה הפנימית היא $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx$

מכפלה זו משרה את הנורמה $\|f\|=\sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx}$

4) לכל $p\ge 1$ המרחב $L^p_{PC}(-\infty,\infty)$ הוא מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $(-\infty,\infty)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx<\infty$ עם הנורמה $\|f\|_p=\left(\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$

שימו לב שהסימון $L^p_{PC}(-\infty,\infty)$ מכיל את רוב המידע על המרחב:

המספר p שמופיע בהגדרת הנורמה

$$L^p_{PC}(-\infty,\infty)$$

הפונקציות במרחב רציפות למקוטעין
(Piecewise Continuous)

תחום האינטגרציה באינטגרל המופיע בהגדרת הנורמה

5) $L^1_{PC}(-\infty,\infty)$ - מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $(-\infty,\infty)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx<\infty$ ובמרחב זה מוגדרת נורמה $\|f\|=\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx$

6) $\ell^1(\mathbb{C})$ - מרחב כל הסדרות האינסופית $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש $x_n \in \mathbb{C}$ ומתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n| < \infty$

במרחב זה מוגדרת נורמה $\|x_n\| = \sum_{n=0}^{\infty}|x_n|$

7) $\ell^2(\mathbb{C})$ - מרחב כל הסדרות האינסופית $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ כך ש $x_n \in \mathbb{C}$

ומתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2 < \infty$. במרחב זה מוגדרת מכפלה פנימית $\langle x_n, y_n \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \overline{y_n}$

מכפלה פנימית זו משרה את הנורמה: $\|x_n\| = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty}|x_n|^2}$

שאלות

1) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$

הוכיחו כי הביטוי $\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$ מהווה נורמה במרחב זה.

2) יהי V מרחב כל הפונקציות הרציפות בקטע $[a,b]$

הוכיחו כי הביטוי $\|f\| = \max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב זה.

3) יהי $V = R_{\leq 2}[x]$ המרחב הוקטורי של כול הפולינומים ממעלה קטנה/שווה מ 2

מעל הממשיים. לכול שני פולינומים $p(x), q(x)$ ב V נגדיר:

$$\langle p(x), q(x) \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1)$$

הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.

4) נגדיר $V = C^1[-1,1]$ (מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$)

ונגדיר $\langle f(x), g(x) \rangle = \int_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}dx + \int_{-1}^{1} f'(x)\overline{g'(x)}dx$

הוכיחו כי $\langle \cdot, \cdot \rangle$ הינה מכפלה פנימית.

5) הוכיחו כי בכול מרחב מכפלה פנימית E ולכל $f,g\in E$ מתקיים:

א) $\langle u,f+g\rangle=\langle u,f\rangle+\langle u,g\rangle \qquad \forall u\in E$

ב) $\operatorname{Re}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+g\|^2-\|f-g\|^2\right)$

ג) $\operatorname{Im}\langle f,g\rangle=\frac{1}{4}\left(\|f+ig\|^2-\|f-ig\|^2\right)$

ד) $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$ (שיוויון המקבילית)

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית. נסמן $w=u+v$ וקטורים במרחב.

הוכיחו כי אם $\langle u,v\rangle=0$ אז $\|w\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$

7) נגדיר את המרחב V להיות מרחב הפונקציות $f(x)$ הממשיות הגזירות ברציפות פעמיים בקטע $[a,b]$ (כלומר $f''(x)$ רציפה ב $[a,b]$).

בדקו האם $\langle f,g\rangle=\int_a^b f''(x)g''(x)dx$ מהווה מכפלה פנימית במרחב זה.

8) נגדיר את המרחב V להיות מרחב של פונקציות $f(x)$ ממשיות וגזירות ברציפות בקטע $[-1,1]$ (כלומר הנגזרת $f'(x)$ רציפה בקטע $[-1,1]$)

כך ש $f(-1)=0$. נגדיר $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f'(x)g'(x)dx$.

הוכיחו כי $\langle f,g\rangle$ מהווה מכפלה פנימית במרחב V.

9) יהי V מרחב הפונקציות הרציפות המרוכבות בקטע $[a,b]$

הוכיחו כי $\|f\|=\int_a^b |f(x)|dx+\max_{[a,b]}|f(x)|$ מהווה נורמה במרחב V.

תשובות סופיות

7) זו אינה מכפלה פנימית

התכנסויות של פונקציות במרחבים נורמיים

ראשית נזכיר מספר מושגים מחדו"א כגון התכנסות נקודתית והתכנסות במידה שווה. לאחר מכן, נגדיר התכנסות חדשה הנקראת התכנסות בנורמה.

התכנסות נקודתית:

אם $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום I, נאמר כי סדרה זו מתכנסת נקודתית ב - I אם לכל $x\in I$ הגבול $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ קיים וסופי.

אם זה אכן מתקיים נסמן $f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ הפונקציה הגבולית.

התכנסות במידה שווה:

אם $f_n(x)$ סדרת פונקציות המוגדרות בתחום I, נאמר כי סדרה זו מתכנסת במידה שווה בתחום I אם ורק אם $\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\xrightarrow{n\to\infty}0$.

הערה: באופן שקול ניתן להגדיר התכנסות במ"ש באופן הבא

$f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בתחום I אם רק אם

לכל $\varepsilon>0$ קיים $N_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N_0$ ולכל $x\in I$ מתקיים $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$

משפט:

אם $f_n(x)$ סדרת פונקציות רציפות בתחום I המתכנסת במ"ש בתחום I אז הפונקציה הגבולית $f(x)$ רציפה בתחום I.

הערה 1:

סדרת פונקציות לא רציפות יכולה להתכנס במ"ש לפונקציה רציפה / לא רציפה

הערה 2:

סדרת פונקציות רציפות יכולה להתכנס נקודתית ולא במ"ש, אל פונקציה רציפה.

התכנסות בנורמה:

יהי V מרחב נורמי. נאמר כי הסדרה $v_n\in V$ מתכנסת בנורמה אל $v\in V$ אם רק אם $\|v_n-v\|_V\xrightarrow{n\to\infty}0$ (כלומר ההפרש הנורמי שואף לאפס)

משפט: אם $\|v_n\|_V\xrightarrow{n\to\infty}\infty$ אז v_n אינה מתכנסת בנורמה

התכנסויות – מה גורר מה?

אם מדובר על קטע סופי $[a,b]$:

אז התכנסות בנורמה $L^p[a,b]$ גורר התכנסות בנורמה $L^q[a,b]$ כאשר $p>q\ge 1$

(נזכיר כי נורמת $L^p[a,b]$ מוגדרת כך - $\|f\|_p=\left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$)

בפרט, התכנסות במ"ש (לעתים נקראת גם נורמת אינסוף) בקטע $[a,b]$ גוררת התכנסות בנורמה $L^2[a,b]$ שגוררת התכנסות בנורמה $L^1[a,b]$.

זה כמובן עובד בכיוון של שלילה, אם אין התכנסות בנורמה $L^1[a,b]$ אז בהכרח אין התכנסות בנורמה $L^2[a,b]$, ואם אין התכנסות בנורמה $L^2[a,b]$ אז בהכרח אין התכנסות במידה שווה בקטע $[a,b]$.

שימו לב: הגרירות הנ"ל תקפות בקטע סופי בלבד ואינן תקפות בתחום אינסופי.

מבחן ה-M של וייארשטראס:

נתבונן בטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. אם קיימת סדרת מספרים M_n כך שמתקיים

א. $|u_n(x)|\le M_n$ לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכל $x\in I$

ב. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n<\infty$ (כלומר מתכנס)

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ מתכנס במידה שווה ב - I.

שאלות

1) א) הוכיחו כי לכל $f \in C[a,b]$ מתקיים $\left|\int_a^x f(t)dt\right| \le \sqrt{x-a}\cdot\|f\|_{L_2[a,b]}$

תזכורת: $\|f\|_{L_2[a,b]} = \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2\, dt}$ ו - $\langle f,g\rangle_{L_2[a,b]} = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$

ב) הוכיחו כי אם $f_n \to f$ בנורמת $L^2[a,b]$ במרחב $C[a,b]$

אזי גם $f_n \to f$ בנורמה $L^1[a,b]$. תזכורת: $\|f\|_{L_1[a,b]} = \int_a^b |f(t)|dt$

ג) האם ההיפך נכון? אם כן, הוכיחו. אם לא, תנו דוגמה נגדית.

2) יהי V מרחב נורמי.

א) הוכיחו כי לכל $u,v \in V$ מתקיים $\|u-v\| \ge \big|\|u\|-\|v\|\big|$

(אי שיוויון זה נקרא אי שיוויון המשולש ההפוך)

ב) הוכיחו כי אם $f_n \xrightarrow{n\to\infty} f$ בנורמה של V אזי $\|f_n\| \xrightarrow{n\to\infty} \|f\|$.

3) נתונה סדרת הפונקציות הבאה

$$f_n(x) = \begin{cases} n\sqrt{n}\cdot x & 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 2\sqrt{n} - n\sqrt{n}\cdot x & \frac{1}{n} < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \frac{2}{n} \le x \end{cases}$$

א) האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב $[0,10]$?

ב) האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב $[0,10]$?

ג) האם $f_n(x)$ מתכנסת ב $L^1[0,10]$?

ד) האם $f_n(x)$ מתכנסת ב $L^2[0,10]$?

4) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x)=n(1-x)x^n$

א) האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב $[0,1]$? אם כן, מצאו את הפונקציה הגבולית.

ב) האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב $[0,1]$?

ג) האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1[0,1]$?

ד) האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[0,1]$?

5) נתונה סדרת פונקציות $f_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left[n,n+\frac{1}{n}\right]\\ 0 & else\end{cases}$

א) האם $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית על הישר הממשי?

ב) האם $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה על הישר הממשי?

ג) האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ד) האם $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

6) יהי V מרחב וקטורי של פונקציות $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפות, גזירות שם למעט מספר סופי של נקודות, כאשר הנגזרת רציפה למקוטעין.

והמכפלה הפנימית היא $\langle f,g\rangle=f(a)g(a)+\int_a^b f'(x)g'(x)dx$

א) לכול $x_0\in[a,b]$ נגדיר את הפונקציה $g_{x_0}(x)=\begin{cases}x-a+1 & a\le x\le x_0\\ x_0-a+1 & x_0\le x\le b\end{cases}$

הוכיחו כי לכול $f\in V$ מתקיים $\langle f(x),g_{x_0}(x)\rangle=f(x_0)$

ב) הוכיחו כי לכול $f\in V$ ולכול $x_0\in[a,b]$ מתקיים $|f(x_0)|\le\sqrt{b-a+1}\cdot\|f\|$

ג) נניח כי $f_n\in V$ סדרת פונקציות המתכנסת בנורמת V אל $f\in V$
הוכיחו כי ההתכנסות היא במידה שווה.

7) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\left[1-\chi_n(x)\right]\left(x+\frac{1}{n}\right)^{-1}+n^{\alpha}\cdot\chi_n(x)$

כאשר $\chi_n(x)=\begin{cases}1 & x\in\left(n-\frac{1}{n^2},n+\frac{1}{n^2}\right)\\ 0 & else\end{cases}$

א) מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת נקודתית ב $[1,\infty)$? אם הסדרה מתכנסת נקודתית, מהי הפונקציה הגבולית?

ב) מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ב $[1,\infty)$?

ג) מהם ערכי הפרמטר α עבורם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ בנורמת $L^1[1,\infty)$?

8) נגדיר את סדרת הפונקציות $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\cdot\chi_{\left[2^k,2^k+k\right]}(x)$

כאשר $\chi_{[a,b]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$

א) האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^1(-\infty,\infty)$?

ב) האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2(-\infty,\infty)$?

9) נגדיר את סדרת הפונקציות הבאה במרחב $L^2[-\pi,\pi]$: $f_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\sin(kx)$

א) האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$ לפונקציה כולשהי?

ב) האם סדרת הפונקציות $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

כעת נגדיר $h_n(x)=\int_0^x f_n(t)dt$.

ג) האם $h_n(x)$ מתכנסת במידה שווה בקטע $[-\pi,\pi]$?

ד) האם $h_n(x)$ מתכנסת בנורמת $L^2[-\pi,\pi]$?

תשובות סופיות

1) ג) ההיפך אינו נכון. ראו דוגמא נגדית בסרטון.

3) א) כן ב) לא ג) כן ד) לא

4) א) כן והפונקציה הגבולית היא פונקציית האפס
ב) לא ג) כן ד) כן

5) א) כן ב) לא ג) כן ד) כן

7) א) כל $\alpha \in \mathbb{R}$ ב) $\alpha < 0$ ג) אין כזה α

8) א) לא ב) כן

9) א) לא ב) לא ג) כן ד) כן

מערכות אורתונורמליות

ההגדרה של מערכת אותונורמלית תהיה מוכרת מהקורס אלגברה ליניארית.
אך בעוד בקורס אלגברה לינארית מתעסקים עם מערכות סופיות, אנו נתעסק לרוב עם מערכות אינסופיות.

מערכת אורתונורמלית:

יהי V מרחב מכפלה פנימית. קבוצת וקטורים אינסופית $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$

תקרא מערכת אורתונורמלית אם מתקיים $\langle v_m, v_n \rangle = \begin{cases} 1 & m=n \\ 0 & else \end{cases}$ לכל $m,n \in \mathbb{N}$

משפט פיתגורס המוכלל:

אם V מרחב מכפלה פנימית, $\{v_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית

אזי $\left\| \sum_{n=1}^{N} \langle f, v_n \rangle v_n \right\|^2 = \sum_{n=1}^{N} \left| \langle f, v_n \rangle \right|^2$

אי שיוויון בסל: אם V מרחב מכפלה פנימית, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית,

אזי לכול $f \in V$ מתקיים $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, v_n \rangle \right|^2 \le \|f\|^2$

הערות:

1) חשוב שהמערכת $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ תהיה מנורמלת, כלומר אורתוגונלית לא מספיק.

2) מקבלים את רימן-לבג: $\lim_{k\to\infty} \langle f, v_k \rangle = 0$ (כי איבר כללי של טור מתכנס שואף לאפס)

3) במקרה של שיוויון, זה נקרא שיוויון פרסבל $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \langle f, v_n \rangle \right|^2 = \|f\|^2$

שאלות

1) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית.

2) נתבונן במערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\varphi_n(x)=\cos(nx)$ במרחב $L^2[-\pi,\pi]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית .

3) יהי מרחב מכפלה פנימית V ותהי $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ מערכת של פולינומים כך ש $\varphi_n(x)$ הינו פולינום ממעלה n. נניח כי לכול n,m טבעיים כך ש $m<n$ מתקיים $\langle\varphi_n(x),x^m\rangle=0$. הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית ב - V.

4) יהי V מרחב כול הפונקציות הרציפות למקוטעין בקטע $[e^{-\pi},e^{\pi}]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\int_{e^{-\pi}}^{e^{\pi}}f(x)\overline{g(x)}\frac{1}{x}dx$

נגדיר $\varphi_n(x)=\sin\left(n\ln(x)\right)$.

הוכיחו כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ אורתוגונלית ב - V.

5) נניח כי המערכת $\{\varphi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית סגורה

במרחב $L^2[a,b]$ עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_1=\int\limits_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$.

יהיו $c>0$ ו d ממשי כולשהו.

הוכיחו כי המערכת $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $\psi_n(x)=\sqrt{c}\cdot\varphi_n(c\cdot x+d)$

הינה מערכת אורתונורמלית סגורה במרחב $L^2\left[\frac{a-d}{c},\frac{b-d}{c}\right]$

עם המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle_2=\int\limits_{\frac{a-d}{c}}^{\frac{b-d}{c}} f(x)\overline{g(x)}dx$.

6) יהי V מרחב מכפלה פנימית. ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{N}$ מערכת אורתונורמלית סופית.

הוכיחו כי לכול $v\in V$ מתקיים $\left\|\sum_{n=1}^{N}\langle v,e_n\rangle e_n\right\|^2=\sum_{n=1}^{N}\left|\langle v,e_n\rangle\right|^2$

7) (פולינומי צ׳בישב)

יהי K מרחב כול הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

ונגדיר ב K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int\limits_{-1}^{1} f(x)\overline{g(x)}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

הוכיחו כי אוסף הפונקציות $\{T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ כאשר $T_n(x)=\cos[n\cdot\arccos(x)]$

(הנקראת גם פולינומי צ׳בישב) הינה מערכת אורתוגונלית ב K

ומצאו קבועים α_n כך ש המערכת $\{\alpha_n T_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית.

8) (פולינומי הרמיט)

יהי K מרחב כול הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן

רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\cdot e^{-x^2}dx<\infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}\cdot e^{-x^2}dx$.

הוכיחו כי פולינומי הרמיט, המוגדרים על ידי $H_n(x)=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתוגונלית ב - K ומצאו להם קבועי נרמול.

הדרכה:

הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל $k<n$ טבעיים מתקיים $\langle H_n,x^k\rangle=0$.

ניתן להיעזר בעובדה כי $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.

9) (פולינומי לג'נדר)

יהי K מרחב כל הפונקציות המרוכבות הרציפות למקוטעין על הקטע $(-1,1)$

ונגדיר ב K מכפלה פנימית: $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}\,dx$

הוכיחו כי פולינומי לג'נדר, הנתונים על ידי $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\left[\left(x^2-1\right)^n\right]$

(נוסחת רודריגז)

מהווים מערכת אורתוגונלית ב K וכי $\langle P_n,P_n\rangle=\frac{2}{2n+1}$ לכול n טבעי.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל $k<n$ טבעיים מתקיים $\langle P_n,x^k\rangle=0$

10) (פולינומי לגר)

יהי K מרחב כול הפונקציות המרוכבות המוגדרות על הישר הממשי שהן רציפות למקוטעין ומקיימות את התנאי $\int_0^\infty |f(x)|^2 \cdot e^{-x}dx < \infty$.

נגדיר על K מכפלה פנימית $\langle f,g\rangle = \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}e^{-x}dx$.

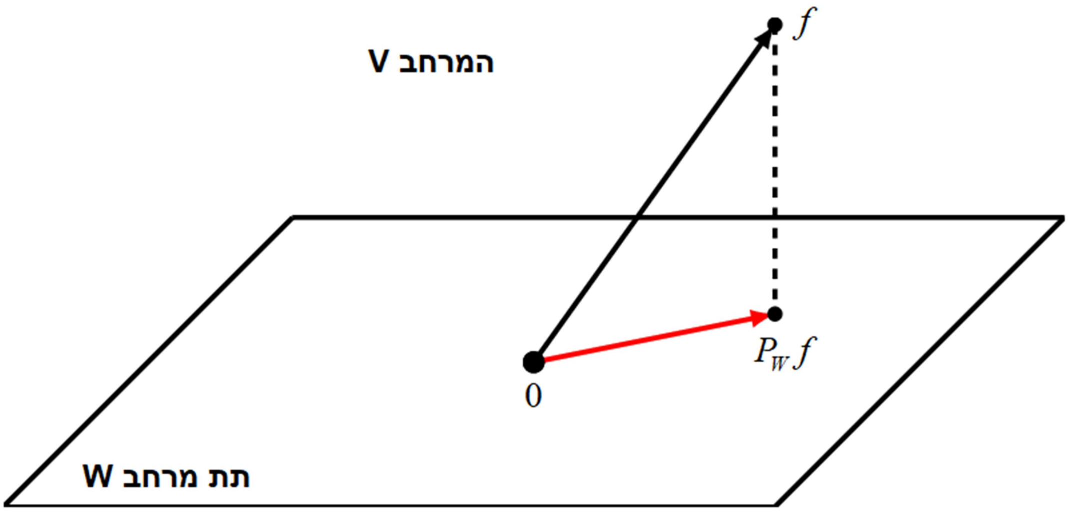
הוכיחו כי פולינומי לגר, המוגדרים על ידי הנוסחה $L_n(x) = \frac{1}{n!}e^x \frac{d^n}{dx^n}\left[x^n e^{-x}\right]$

(נוסחת רודריגז) מהווים מערכת אורתונורמלית במרחב K.

רמז: הראו תחילה כי מספיק להוכיח שלכל $k<n$ טבעיים מתקיים $\langle L_n, x^k\rangle = 0$

ניתן להיעזר בנוסחה $\int_0^\infty x^n e^{-x}dx = n!$

משפט קירוב מיטבי



בנושא זה נדון בבעיה הבאה:

נניח ויש לנו מרחב נורמי V ותת מרחב $W \subseteq V$. בהינתן איבר $f \in V$ נרצה למצוא את האיבר ב W (אשר נסמן אותו לרוב ב $P_W f$ או u_*) הקרוב ביותר ל - f.

לשם כך, יש לנו את המושגים והמשפטים הבאים:

קירוב מיטבי:

אם V מרחב נורמי, $f \in V$, $W \subseteq V$ תת מרחב, נאמר כי $u_* \in W$ הינו הקירוב המיטבי של f ביחס ל W אם ורק אם לכל $w \in W$ מתקיים $\|u_* - f\| \le \|w - f\|$.

משפט קירוב מיטבי:

אם V מרחב מכפלה פנימית, $f \in V$, $W \subseteq V$ תת מרחב, אז $u_* \in W$ הינו הקירוב המיטבי של f ביחס ל W אם ורק אם לכל וקטור $u \in W$ מתקיים $\langle f - u_*, w \rangle = 0$.

נוסחת קירוב מיטבי:

אם V מרחב מכפלה פנימית $f \in V$, $W \subseteq V$ תת מרחב ונניח כי קיימת מערכת אורתונורמלית סופית $\{e_k\}_{k=1}^{N}$ כך ש - $W = span\{e_1,...,e_N\}$

אזי הקירוב המיטבי של f ביחס ל W נתון על ידי $u_* = P_W(f) = \sum_{k=1}^{N} \langle f, e_k \rangle e_k$

<u>הערות:</u>

1) יש לשים לב שהמערכת אורתונורמלית, כלומר אורתוגונלית לא מספיק טוב.
2) כדי למצוא מערכת אורתונורמלית כזו ניתן להיעזר בתהליך גרם-שמידט.
3) הנוסחה תקפה רק עבור תת מרחב W ממימד סופי, כלומר המערכת האורתונורמלית חייבת להיות מורכבת ממספר סופי של איברים.

תהליך גרם-שמידט:

בהינתן V מרחב מכפלה פנימית ומערכת וקטורים $\{v_1,...,v_N\}$

ניתן להפוך אותה למערכת אורתונורמלית $\{e_1,...,e_N\}$ על ידי התהליך הבא

$$e_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

$$e_{n+1} = \frac{v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_k \rangle e_k}{\left\| v_{n+1} - \sum_{k=1}^{n} \langle v_{n+1}, e_k \rangle e_k \right\|}$$

שאלות

1) מצאו את נקודות המינימום של הפונקציה

$$F(\alpha,\beta,\gamma)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x)-\alpha-\beta\cos(x)-\gamma\cos(10x)\right|^2dx$$

א) כאשר $f(x)=\cos^2(x)$

ב) כאשר $f(x)=x^3$

ג) כאשר $f(x)=\sin(x)$

2) במרחב $C[-\pi,\pi]$ נגדיר את המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx$

נגדיר תת מרחב $W=span\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ ופונקציה $f(x)=|x|$.

מצאו פונקציה $g\in W$ כך ש $\|f-g\|$ מינימלי.

הערה: שימו לב שהמערכת $\{1,\sin(x),\cos(x),x\}$ **איננה** אורתונורמלית.

3) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א) הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=f(-1)\overline{g(-1)}+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית.

ב) מצאו את כול הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\left|-1-\alpha+\beta-\gamma\right|^2+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

4) נתבונן במרחב $C[-1,1]$ מעל $\mathbb{C}$.

א) הוכיחו כי $\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1}f(x)\overline{g(x)}dx+\int_{-1}^{1}f'(x)\overline{g'(x)}dx$ מהווה מכפלה פנימית

ב) מצאו את כול הערכים של $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{C}$ כך שהביטוי הבא יהיה מזערי

$$\int_{-1}^{1}\left|x^3-\alpha-\beta x-\gamma x^2\right|^2dx+\int_{-1}^{1}\left|3x^2-\beta-2\gamma x\right|^2dx$$

5) תהי V קבוצת הפונקציות הרציפות על הישר הממשי המקיימות

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 e^{-x^2} dx < \infty$$

א) הוכיחו כי V עם הפעולות הרגילות של חיבור פונקציות וכפל פונקציה בסקלר, מהווה מרחב מכפלה פנימית כאשר $\langle f,g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\, e^{-x^2} dx$.

ב) הוכיחו כי כול הפולינומים שייכים ל V.

ג) מצאו את הקירוב המיטבי של x^3 על מרחב הפולינומים מדרגה 2 לכול היותר.

הערה: ניתן להשתמש באינטגרלים הבאים

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}$$

6) יהי L מרחב וקטורי של פונקציות ממשיות ורציפות למקוטעין על $[1,\infty)$ המקיימות $\int_1^{\infty} x|f(x)|^2 dx < \infty$.

במרחב L מוגדרת המכפלה הפנימית $\langle f,g\rangle = \int_1^{\infty} f(x)g(x)x\,dx$

נגדיר $W = span\left\{\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}, \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}}\right\}$. מצאו את ההיטל האורתוגונלי $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)$

7) תהי $f \in C[-1,1]$. הוכיחו כי לכול פונקציה אי זוגית $g \in C[-1,1]$ מתקיים $\frac{1}{4}\int_{-1}^{1} |f(x)+f(-x)|^2 dx \le \int_{-1}^{1} |f(x)-g(x)|^2 dx$

תשובות סופיות

1) א) $\alpha=\frac{1}{2},\beta=\gamma=0$

ב) $\alpha=\beta=\gamma=0$

ג) $\alpha=\beta=\gamma=0$

2) $g(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\cos(x)$

3) א) הוכחה

ב) $\alpha=0\ ,\ \beta=1\ ,\ \gamma=0$

4) $\alpha=0\ ,\ \beta=\frac{9}{10}\ ,\ \gamma=0$

5) א) הוכחה

ב) הוכחה

ג) $\frac{3}{2}x$

6) $P_W\left(\frac{x}{e^{\sqrt{x}}}\right)=\frac{28}{e}x^{-\frac{3}{2}}-\frac{36}{e}x^{-\frac{5}{2}}$

7) הוכחה

מערכת אורתונורמלית סגורה

משפט השקילויות: יהי V מרחב מכפלה פנימית, $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית ותהי $f\in V$, אזי הטענות הבאות שקולות:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\left\langle f,v_n\right\rangle\right|^2=\|f\|^2$ (שיוויון פרסבל)

2) $f=\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle f,v_k\right\rangle v_k$ (משמעות השיוויון היא $\lim_{N\to\infty}\left\|f-\sum_{k=1}^{N}\left\langle f,v_k\right\rangle v_k\right\|=0$)

3) $f\in\overline{span\{v_k\}_{k=1}^{\infty}}$ (ראו את ההגדרה הבאה)

ספאן-סגור: אם V מרחב מכפלה פנימית ו- $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית אזי הקבוצה $\overline{span\{v_k\}_{k=1}^{\infty}}$ היא קבוצת כל הוקטורים $v\in V$ בעלי התכונה הבאה: לכל $\varepsilon>0$ קיים צירוף לינארי סופי $\sum_{k=1}^{m}c_kv_k$ כך שמתקיים $\left\|v-\sum_{k=1}^{m}c_kv_k\right\|<\varepsilon$

מערכת אורתונורמלית סגורה: אם V מרחב מכפלה פנימית, אזי קבוצת וקטורים $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ תקרא מערכת אורתונורמלית סגורה אם הטענות במשפט השקילויות מתקיימות לכל וקטור במרחב.

למשל, נוכל להגיד כי $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה אם רק אם מתקיים שיוויון פרסבל לכל וקטור במרחב.

שיוויון פרסבל מוכלל: אם V מרחב מכפלה פנימית ו $\{v_k\}_{k=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה אזי לכול $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=\sum_{k=1}^{\infty}\langle u,e_k\rangle\overline{\langle v,e_k\rangle}$

מרחב שלם: מרחב מכפלה פנימית/נורמי ייקרא מרחב שלם אם ורק אם כל סדרת קושי במרחב מתכנסת לאיבר במרחב.

מרחב הילברט: מרחב מכפלה פנימית שלם

מרחב בנך: מרחב נורמי שלם

מערכת אורתונורמלית שלמה:

אם V מרחב מכפלה פנימית , אזי קבוצת וקטורים $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ תקרא מערכת אורתונורמלית שלמה אם היא אורתונורמלית והוקטור היחיד $v \in V$ המקיים $\langle v, e_k \rangle = 0$ לכל k הוא $v = 0$ (כלומר הוקטור היחיד במרחב המאונך לכל וקטורי המערכת הוא וקטור האפס)

הערות:

1) כל מערכת אורתונורמלית סגורה היא גם מערכת אורתונורמלית שלמה (אך ההפך לא בהכרח נכון)
2) במרחב הילברט (מרחב מכפלה פנימית שלם), מערכת אורתונורמלית היא סגורה אם ורק אם היא שלמה.
3) לא להתלבל עם מרחב שלם.
מרחב שלם ומערכת אורתונורמלית שלמה אלו שני דברים שונים לחלוטין.

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שאלות

1) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א) האם קיים $v \in V$ כך ש $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}$?

ב) נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

יהיו $u, v \in V$ כך ש $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{n}$ ו- $\langle v, e_n \rangle = \frac{1}{n+1}$. חשבו את $\langle u, v \rangle$

2) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית אינסופית.

א) יהי $u \in V$ כך ש $\langle u, e_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$.

מצאו את הקירובים המיטביים u_1, u_2, u_3 ל u בתת המרחבים

$W_1 = span\{e_1\}$, $W_2 = span\{e_1, e_2\}$, $W_3 = span\{e_1, e_2, e_3\}$ בהתאמה.

ב) נניח כי $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה.

חשבו $\|u - u_1\|$, $\|u - u_2\|$, $\|u - u_3\|$

כאשר u_1, u_2, u_3 הם הקירובים המיטביים מהסעיף הקודם.

3) יהי V מרחב מכפלה פנימית ותהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מערכת אורתונורמלית סגורה ב V

נגדיר

$$g_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f_{2n-1} - f_{2n}\right] \qquad g_{2n-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[f_{2n-1} + f_{2n}\right].$$

א) הוכיחו כי המערכת $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית ב V.

ב) הוכיחו כי המערכת $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב V.

תשובות סופיות

1) א) לא קיים

ב) $\langle u,v\rangle = 1$

2) א) $u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}}e_2 + \frac{1}{\sqrt{15}}e_3 \quad , \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1 + \frac{1}{\sqrt{8}}e_2 \quad , \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}e_1$

ב) $\|u-u_3\| = \sqrt{\frac{9}{40}} \quad , \quad \|u-u_2\| = \sqrt{\frac{7}{24}} \quad , \quad \|u-u_1\| = \sqrt{\frac{5}{12}}$

3) א) הוכחה

ב) הוכחה

מערכת האר

הקדמה:

לכל מספר טבעי m קיימים $n\geq 0$ ו - $0\leq k\leq 2^n-1$ יחידים כך ש $m=2^n+k$.

מערכת האר $\{\varphi_m(x)\}_{m=0}^{\infty}$ מוגדרת בקטע $[0,1]$ באופן הבא:

$$\varphi_0(x)\equiv 1 \qquad \varphi_m(x)=\varphi_{2^n+k}(x)=\begin{cases}2^{\frac{n}{2}} & x\in\left[\frac{k}{2^n},\frac{k+0.5}{2^n}\right)\\ -2^{\frac{n}{2}} & x\in\left[\frac{k+0.5}{2^n},\frac{k+1}{2^n}\right)\\ 0 & else\end{cases}$$

סימונים נוספים:

א) לעתים מסמנים $\varphi_{n,k}(x)$ במקום $\varphi_{2^n+k}(x)$ ו - $\varphi_{0,-1}(x)$ במקום $\varphi_0(x)$

ב) לעתים מסמנים $\psi_{n,k}(x)$ במקום $\varphi_{2^n+k}(x)$ ו - ψ_{-1} במקום $\varphi_0(x)$

משפט: מערכת האר היא מערכת אורתונורמלית סגורה ב $L^2_{PC}[0,1]$

שאלות

1) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי.

מצאו את הקירוב המיטבי לפונקציה $f(x)=x^N$ ביחס לתת-המרחב הנפרש

ע"י הפונקציות $\{\varphi_{0,-1}\}\cup\{\varphi_{n,k}\}_{n=0\ k=n}^{n=N\ k=2^n-1}$.

2) נתבונן במרחב $L^2_{PC}[0,1]$ ויהי N מספר טבעי.

מצאו את הקירוב המיטבי לפונקציה $f(x)=e^{i\pi 2^{N+1}x}$ ביחס לתת-המרחב הנפרש

ע"י הפונקציות $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0\ k=n}^{n=N\ k=2^n-1}$.

3) א) מצאו טור פורייה מוכלל של $f(x)=e^x$ ע"י בסיס האר $\{\psi_{-1}\}\cup\{\psi_{n,k}\}_{n=0\ k=n}^{n=\infty\ k=2^n-1}$

ב) הוכיחו כי $\dfrac{e^2-4e+3}{2\left(e^2-1\right)}=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n}{1-e^{\frac{2}{2^n}}}\left(2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right)^2$

4) האם קיימת $f\in L^2_{PC}[0,1]$ המקיימת $\int_0^1 f(x)\psi_{n,k}(x)\,dx=\dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\sqrt{(n+2)\ln(n+2)}}$

לכל $n\ge 0$ ולכל $k=0,1,\dots,2^n-1$?

5) נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\cdot 2^{\frac{n}{2}}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\psi_{n,k}(x)\right)$ כאשר $\psi_{n,k}(x)$ פונקציות האר.

א) האם הטור מתכנס נקודתית בקטע $[0,1]$?

ב) האם הטור מתכנס בנורמה $L^2[0,1]$?

תשובות סופיות

1) $$P_W f=\frac{1}{N+1}+\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{n=N}\frac{1}{2^{n\left(N+\frac{1}{2}\right)}}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}\left[2\left(k+\frac{1}{2}\right)^{N+1}-k^{N+1}-(k+1)^{N+1}\right]\varphi_{n,k}(x)$$

2) $$P_W f=0$$

3) א) $$f\sim(e-1)\psi_{-1}(x)+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k=2^n-1}2^{\frac{n}{2}}\left[2e^{\frac{0.5}{2^n}}-1-e^{\frac{1}{2^n}}\right]e^{\frac{k}{2^n}}\psi_{n,k}(x)$$

ב) הוכחה

4) לא קיימת

5) א) לא

ב) כן

תרגילים מסכמים

שאלות

1) יהי V מרחב הפונקציות הגזירות ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$.

נגדיר על V מכפלה פנימית : $\langle f,g\rangle=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{g(x)}dx+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\overline{g'(x)}dx$

(אין צורך להוכיח כי זאת מכפלה פנימית)

א) הוכיחו כי המערכת $\{e^{inx}\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ מהווה מערכת אורתוגונלית במרחב V.

מצאו נורמה של e^{inx} המושרית מהמכפלה הפנימית הנ"ל.

ב) הוכיחו כי לא קיימת $f\in V$ המקיימת $\lim_{n\to\infty}\frac{n\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(x)-in\cdot f'(x)\right)e^{-inx}dx\right|^2}{1+n^2}=1$

2) נגדיר $a_n=\min_{\alpha\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|\cos(x)|}-\alpha\cos(nx)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}a_n$

3) נגדיר $R_n=\min_{a,b\in\mathbb{C}}\left[\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sqrt{|x|^3}-a\sin(nx)-b\sin([n+1]x)\right|^2dx\right]$. חשבו $\lim_{n\to\infty}R_n$

4) נגדיר $g(a,b)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\min\{1,|x|\}-a-b\sin(nx)\right|^2dx$.

א) מצאו את a,b כך ש $g(a,b)$ מינימלית

ב) חשבו את $g(a,b)$ עבור a,b אלו

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{4}{\pi}$

3) $\lim_{n\to\infty} R_n = \frac{\pi^3}{2}$

4) א) $b=0$, $a=1-\frac{1}{2\pi}$

ב) $g\left(1-\frac{1}{2\pi},0\right)=2-\frac{4}{3\pi}-2\left(1-\frac{1}{2\pi}\right)^2$