טורי פורייה

הקדמה

פונקציה רציפה למקוטעין:

פונקציה $f(x)$ תקרא רציפה למקוטעין בקטע סופי $[a,b]$ אם יש מספר סופי של נקודות $a=x_0<x_1<...<x_{n+1}=b$ כך ש –

א) $f(x)$ רציפה בקטעים (x_k,x_{k+1}) לכל $0\le k\le n$

ב) בנקודות הפנימיות $x_1,...,x_n$ הגבולות החד-צדדיים קיימים וסופיים:

$$\lim_{x\to x_k-} f(x) \quad , \quad \lim_{x\to x_k+} f(x) \qquad \forall 1\le k\le n$$

ג) בקצוות הגבולות החד-צדדים גם קיימים וסופיים: $\lim_{x\to b-} f(x)$, $\lim_{x\to a+} f(x)$

__הערה:__ פונקציה $f(x)$ תקרא רציפה למקוטעין בתחום אינסופי I

אם בכל תת-קטע סופי $[a,b]\subset I$ הפונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין.

אינטגרלים של פונקציות זוגיות ואי זוגיות

הגדרה: $f(x)$ תקרא פונקציה זוגית אם $f(x)=f(-x)$

הגדרה: $f(x)$ תקרא פונקציה אי-זוגית אם $f(x)=-f(-x)$

תכונות:

1) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ זוגית אזי $f(x)g(x)$ זוגית

2) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $f(x)g(x)$ אי-זוגית

3) אם $f(x)$ אי-זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $f(x)g(x)$ זוגית

4) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ זוגית אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ זוגית

5) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית (או הפוך) אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ אי-זוגית

6) אם $f(x)$ אי-זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ זוגית

כדאי לחשוב במקרים 1-6 על פונקציה זוגית כמו + ופונקציה אי-זוגית כמו –

7) אם $f(x),g(x)$ זוגיות אז $f(g)\pm g(x)$ זוגית

8) אם $f(x),g(x)$ אי-זוגיות אז $f(g)\pm g(x)$ אי-זוגית

אינטגרלים:

אם $f(x)$ אי-זוגית אז $\int_{-L}^{L} f(x)dx=0$ (אינטגרל של פונ' אי זוגית בקטע סימטרי)

אם $f(x)$ זוגית אז $\int_{-L}^{L} f(x)dx=2\int_{0}^{L} f(x)dx$ (אינטגרל של פונ' זוגית בקטע סימטרי)

טור פורייה ממשי בקטע $[-\pi,\pi]$

בהינתן פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ (לעתים נרשום $f\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$)

נסמן $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$

הטור באגף ימין נקרא טור הפורייה הממשי של $f(x)$ והמקדמים נתונים ע״י

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos(nx)dx \quad , \quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin(nx)dx$$

אנו מסמנים $\sim$ ולא $=$ כדי להדגיש שלא תמיד טור פורייה מתכנס נקודתית לפונקציה.

שאלות

מצאו טור פורייה ממשי עבור הפונקציות הבאות בקטע $[-\pi,\pi]$

1) $f(x)=x$

2) $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ 0 & -\pi<x<0\end{cases}$

3) $f(x)=\sin(|x|)$

4) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$

תשובות סופיות

1) $f(x)\sim-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$

2) $f(x)\sim\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

3) $f(x)\sim\frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi}\frac{1}{1-4k^2}\sin(2kx)$

4) $f(x)\sim\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi}\frac{\sin(n)}{n}\cos(nx)$

טור פורייה מרוכב בקטע $[-\pi,\pi]$

בהינתן פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ (לעתים נסמן $f \in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$)

נסמן $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$ והטור באגף ימין נקרא טור הפורייה המרוכב של $f(x)$

והמקדמים נתונים ע״י $c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}dx$

שאלות

מצאו טור פורייה מרוכב עבור הפונקציות הבאות בקטע $[-\pi,\pi]$

1) $f(x)=x$

2) $f(x)=\begin{cases} -x & -\pi \le x < 0 \\ 0 & 0 \le x < \pi \end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases} x & -\pi \le x < 0 \\ 2x & 0 \le x < \pi \end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases} 1 & -\pi \le x < 0 \\ -2 & 0 \le x < \pi \end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases} 0 & -\pi \le x < 0 \\ \sin(x) & 0 \le x < \pi \end{cases}$

תשובות סופיות

1) $f(x) \sim -\sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^n}{in} e^{inx}$

2) $f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left\{-\pi\frac{(-1)^n}{in} + \frac{1-(-1)^n}{n^2}\right\} e^{inx}$

3) $f(x) \sim \frac{\pi}{4} - \sum_{\substack{-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{2\pi}\left\{-\frac{1}{n^2} + \frac{(-1)^n}{n^2} - 3(-1)^n\frac{\pi}{in}\right\} e^{inx}$

4) $f(x) \sim -\frac{1}{2} - \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{3}{\pi i(2k-1)} e^{i(2k-1)x}$

5) $f(x) \sim \frac{1}{4i}e^{ix} - \frac{1}{4i}e^{-ix} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\frac{1}{1-4k^2} e^{i\cdot 2k\cdot x}$

משפט פרסבל

בהינתן $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ יש לנו את שיוויון פרסבל.

נסמן $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ ו - $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$

<u>עבור טור פורייה ממשי:</u> $\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\frac{|a_0|^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2+\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2$

<u>עבור טור פורייה מרוכב:</u> $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx=\sum_{-\infty}^{\infty}|c_n|^2$

<u>משפט פרסבל המוכלל</u>

בהינתן $f(x),g(x)$ פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ יש לנו את שיוויון פרסבל המוכלל.

<u>עבור טור פורייה ממשי:</u> נסמן

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$$

$$g(x)\sim\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(nx)+B_n\sin(nx)$$

ומתקיים

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{a_0\overline{A_0}}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{A_n}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\overline{B_n}$$

<u>עבור טור פורייה מרוכב:</u> נסמן

$$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}f_ne^{inx}$$

$$g(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}g_ne^{inx}$$

ומתקיים

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\overline{g(x)}dx=\sum_{-\infty}^{\infty}\left(f_n\cdot\overline{g_n}\right)$$

שאלות

1) באמצעות טור הפורייה $x \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$ חשבו את הסכום $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

2) נתון כי טור הפורייה הממשי של $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$ בקטע $[-\pi, \pi]$

הוא $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)} \sin([2k-1]x)$. הוכיחו $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$

3) נתונות הפונקציות $f(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le \pi \\ x+\pi & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = x$

מצאו להן טורי פורייה ממשיים בקטע $[-\pi, \pi]$ וחשבו $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

4) מצאו טור פורייה מרוכב של הפונקציה $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x < 0 \end{cases}$

בקטע $[-\pi, \pi]$ וחשבו באמצעותו את הסכום $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$

5) נתונות $f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \le x \le \pi \\ e^{x^2} & -\pi \le x < 0 \end{cases}$ ו- $g(x) = \begin{cases} 0 & 1 < x \le \pi \\ \frac{1}{x^2+1} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & -\pi \le x < 0 \end{cases}$

נסמן את טורי הפורייה המרוכבים שלהם ב $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} g_n e^{inx}$, $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{inx}$

חשבו את הסכום $\sum_{-\infty}^{\infty} \left(f_n \cdot \overline{g_n}\right)$

6) נתונה פונקציה $f(x)$ מחזורית עם מחזור 2π המקיימת

$$f(x)=\sinh(x)=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \qquad -\pi\le x<\pi$$

א) שרטטו את גרף הפונקציה בקטע $-3\pi<x<3\pi$

ב) פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי

ג) חשבו את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1+n^2\right)^2}$

7) הפונקציה $f(x)$ מוגדרת בקטע $[-\pi,\pi]$ ע"י הנוסחה

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+2)^2}}\cdot e^{inx}$$

חשבו את האינטגרל $\int_{-\pi}^{\pi}\left|f(x+\pi)-f(x)\right|^2dx$

8) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f(x)=\sin\left(\frac{px}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $p\neq 0$ כדי להוכיח את הזהות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$

9) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}h^2 & h\le x\le\pi\\ 0 & -\pi\le x<h\end{cases}$$

בקטע $[-\pi,\pi]$ כאשר $0\neq h\in[-\pi,\pi]$ כדי לחשב $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n\cos(2n)}{n^2}$

10) א) מצאו טור פורייה מרוכב של $f(x)=\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ בקטע $[-\pi,\pi]$

ב) הוכיחו באמצעות הטור מסעיף א' כי $\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{32}$

ג) הסיקו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(1-4n^2\right)^2}=\frac{\pi^2}{64}$

תשובות סופיות

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

2) הוכחה

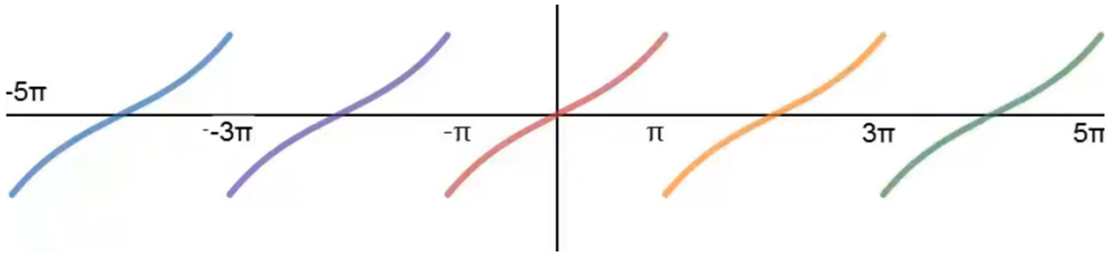
3) $f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{1}{n}\sin(nx)$

$g(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2}{n}(-1)^n \sin(nx)$

4) $\sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{4}$, $f(x) \sim \frac{1}{2} + \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi i(2k+1)} e^{i(2k+1)x}$

5) הוכחה

6) א)



ב) $\sinh(x) \sim -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n}{n^2+1} \frac{\sinh(\pi)}{\pi} \sin(nx)$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(1+n^2)^2} = \frac{\sinh(2\pi)-2\pi}{8\sinh^2(\pi)}\pi$

7) $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x+\pi) - f(x)|^2 dx = 8\pi$

8) הוכחה

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-(-1)^n \cos(2n)}{n^2} = \frac{\pi^2-4}{4}$

10) א) $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{4n(-i)(-1)^n}{\pi(1-4n^2)} e^{inx}$ ב) הוכחה ג) הוכחה

הלמה של רימן לבג

בהינתן פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ (לעתים נרשום $f\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$)

נסמן $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)$ (טור פורייה ממשי)

נסמן $f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ (טור פורייה מרוכב)

הלמה של רימן לבג אומרת כי המקדמים שואפים לאפס, כלומר $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=0$

עבור המקדמים של הטור הממשי ו - $\lim_{|n|\to\infty}c_n=0$ עבור המקדמים של הטור המרוכב.

שאלות

1) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}e^{x^2+2x}\cos\left(\sqrt{|x|}\right)\sin(nx)\,dx$

2) חשבו $\lim_{n\to\infty}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}}\frac{n}{(nt)^2+1}e^{in^2t}\,dt$

3) הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\left(n\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{x}\frac{s\cdot e^{s^2}ds}{\sqrt{s^2+2017}}dx\right)=0$

תשובות סופיות

1) 0

2) 0

3) הוכחה

משפט דיריכלה (התכנסות נקודתית של טור פורייה)

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ (לעתים נסמן $f\in L^2_{PC}[-\pi,\pi]$)

ותהי $-\pi<x_0<\pi$ נקודה כולשהי.

נניח כי הנגזרות החד-צדדיות $f'(x_0+)$ ו $f'(x_0-)$ קיימות.

אז טור הפורייה של $f(x)$ יתכנס נקודתית ל - $\frac{f(x_0-)+f(x_0+)}{2}$ בנקודה x_0

אם $x_0=\pi$ או $x_0=-\pi$ והנגזרות החד – צדדיות $f(\pi^-)$ ו $f'(-\pi^+)$ קיימות

אז טור הפורייה של $f(x)$ יתכנס נקודתית ל - $\frac{f(-\pi^+)+f(\pi^-)}{2}$ בנקודה x_0

שאלות

1) בתרגיל קודם פיתחנו את הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[-\pi,\pi]$ לטור פורייה

ממשי: $x\sim\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{2}{n}(-1)^n\sin(nx)$.

היעזרו בפיתוח זה כדי להוכיח $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\frac{\pi}{4}$ רמז: הציבו $x=\frac{\pi}{2}$

2) נתונה פונקציה מחזורית עם מחזור 2π :

$$f(x)=\begin{cases}2+\frac{2x}{\pi} & -\pi<x<0\\ 2 & 0<x<\pi\end{cases}$$

א) שרטטו את גרף הפונקציה בתחום $[-3\pi,3\pi]$

ב) פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי

ג) הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$

3) במרחב הפונקציות $L^2_{PC}\left[-\pi,\pi\right]$ נתונה הפונקציה $f(x)=x^2$

א) חשבו את טור פורייה הממשי של f

ב) חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$

ג) חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

ד) חשבו את הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$

4) היעזרו בפיתוח פורייה של הפונקציה $f\left(x\right)=\cos\left(ax\right)$ בקטע $\left[-\pi,\pi\right]$

כאשר a אינו מספר שלם, כדי להוכיח את הזהויות הבאות:

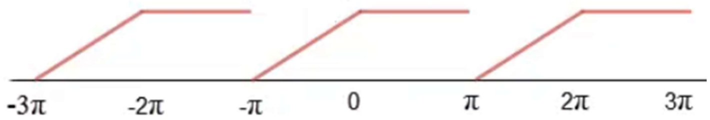
א) $$\frac{1}{\sin\left(\pi a\right)}=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}\right]$$

ב) $$\cot\left(\pi a\right)=\frac{1}{\pi a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\pi a+\pi n}+\frac{1}{\pi a-\pi n}$$

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) א)



ב) $f(x) \sim \frac{3}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2} \cos([2k-1]x) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^n}{\pi n} \sin(nx)$

ג) הוכחה

3) א) $f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} 4 \frac{(-1)^n}{n^2} \cos(nx)$

ב) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$

ג) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}$

ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4) א) הוכחה

ב) הוכחה

המשכה זוגית והמשכה אי זוגית

המשכה זוגית

בהינתן פונקציה $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$ ניתן להמשיך אותה באופן זוגי לקטע $[-\pi,\pi]$

$$F_{even}(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x<\pi \\ f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

כאשר מבצעים המשכה אי זוגית מקבלים טור קוסינוסים

המשכה אי זוגית

בהינתן פונקציה $f(x)$ בקטע $[0,\pi]$ ניתן להמשיך אותה באופן אי זוגי לקטע $[-\pi,\pi]$

$$F_{odd}(x)=\begin{cases} f(x) & 0\le x<\pi \\ -f(-x) & -\pi<x<0 \end{cases}$$

כאשר מבצעים המשכה אי זוגית מקבלים טור סינוסים

שאלות

1) נתונה הפונקציה $f(x)=x$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור קוסינוסים $\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)$ והוכיחו כי לכל $0<x<\pi$

את הזהות הבאה: $x=\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$

2) נתונה הפונקציה $f(x)=1$ בקטע $[0,\pi]$.

מצאו לה טור סינוסים $\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$ והוכיחו כי

א) לכל $0<x<\pi$ מתקיים $1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

ב) $-\frac{\pi}{4}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k-1)}$

תשובות סופיות

1) טור הקוסינוסים הינו $\frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2k-1)^2}\cos([2k-1]x)$

2) טור הסינוסים הינו $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{\pi(2k-1)}\sin([2k-1]x)$

גזירה ואינטגרציה של טורי פורייה

פונקציה גזירה ברציפות למקוטעין:

פונקציה $f(x)$ תקרא גזירה ברציפות למקוטעין בקטע סופי $[a,b]$

אם יש מספר סופי של נקודות $a=x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}=b$ כך ש –

א) $f(x)$ גזירה והנגזרת רציפה בקטעים (x_k,x_{k+1}) לכל $0\le k\le n$

ב) בנקודות הפנימיות $x_1,\ldots,x_n$ הגבולות החד-צדדיים קיימים וסופיים:

$$\forall 1\le k\le n \qquad \lim_{x\to x_k+} f'(x) \ , \ \lim_{x\to x_k-} f'(x)$$

ג) בקצוות הגבולות החד-צדדיים קיימים וסופיים: $\lim_{x\to b-} f'(x) \ , \ \lim_{x\to a+} f'(x)$

__הערה:__ פונקציה $f(x)$ תקרא גזירה ברציפות למקוטעין בתחום אינסופי I

אם בכל תת-קטע סופי $[a,b]\subset I$ הפונקציה $f(x)$ גזירה ברציפות למקוטעין.

משפט גזירה איבר איבר של טורי פורייה:

נניח כי מתקיימים התנאים הבאים

א) $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$

ב) $f(-\pi)=f(\pi)$

ג) $f(x)$ גזירה ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$

אז ניתן לגזור איבר איבר את טור הפורייה של $f(x)$ ולקבל את טור הפורייה של $f'(x)$. למשל, אם נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אז $f'(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}inc_ne^{inx}$

משפט אינטגרציה איבר איבר של טורי פורייה:

אם $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$ אז ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור הפורייה של $f(x)$. למשל, אם נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ אז לכל $x\in[-\pi,\pi]$

מתקיים:

$$\int_{-\pi}^{x} f(t)dt=c_0(x+\pi)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{c_n}{in}\left[e^{inx}-(-1)^n\right]$$

הערות:

1. הטור באגף בימין (כולל הפוני' הלינארית) מתכנס במ"ש לפוני' באגף שמאל.
2. רק אם $c_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=0$ אגף ימין ייקרא טור פורייה.
3. באופן דומה עבור טור פורייה ממשי

שאלות

1) תהי $f(x)$ פונקציה רציפה המקיימת $f(-\pi)=f(\pi)$ ונניח כי היא גזירה ברציפות למקוטעין (כלומר נניח $f'(x)\in L^2_{PC}\left[-\pi,\pi\right]$). נסמן $f(x)\sim\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$

הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{inx}$ מתכנס בהחלט

2) נתונה הפונקציה $f(x)=x\left(\pi-x\right)$ בקטע $\left[0,\pi\right]$

א) פתחו את הפונקציה לטור סינוסים

ב) לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים)

ג) הוכיחו כי $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^6}=\frac{\pi^6}{960}$

ד) הוכיחו כי $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{\left(2k-1\right)^3}=\frac{\pi^3}{32}$

ה) מצאו פיתוח לטור קוסינוסים של $g(x)=\frac{\pi x^2}{2}-\frac{x^3}{3}$ בקטע $\left[0,\pi\right]$

ו) בעזרת הטור הקודם הוכיחו כי $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2k-1\right)^4}=\frac{\pi^4}{96}$ רמז: הציבו $x=0$.

3) נתונה הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $\left[0,2\right]$

א) פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב.

ב) לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים)

ג) חשבו את סכום הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}$

4) נתבונן בטור הפורייה $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}e^{in(x+i)}$

כמה פעמים ניתן לגזור את $f(x)$?

5) א) הוכיחו כי $\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$ בקטע $(0, 2\pi)$

ב) נסמן $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$. מצאו את $g(x)$ בקטע $(0, 2\pi)$ באופן מפורש

6) תהי $f(x)$ גזירה ברציפות $k-1$ פעמים בקטע $[-\pi, \pi]$,
גזירה ברציפות למקוטעין k פעמים כך ש $f^{(j)}(-\pi) = f^{(j)}(\pi)$ לכל $0 \le j \le k-1$
נסמן $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$. הוכיחו כי $\lim_{n \to \infty}(n^k c_n) = 0$

7) א) תהי $f(x) \in L_{PC}^2[-\pi, \pi]$ פונקציה גזירה ברציפות המקיימת $f(-\pi) = f(\pi)$
ו - $\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = 0$. הראו כי $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx$

ב) תהי $f(x) \in L_{PC}^2[0, \pi]$ גזירה ברציפות המקיימת $f(0) = f(\pi) = 0$
הראו כי $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 dx \le \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 dx$

8) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1} e^{inx}$

א) הוכיחו כי $f(x)$ רציפה

ב) הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות

9) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 1} \sin(n^2 x)$

א) הוכיחו כי $f(x)$ רציפה

ב) הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה ברציפות

10) נגדיר $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n^{1.4}} + \frac{\sin(nx)}{n^{2.8}}$

א) האם $f(x)$ רציפה?

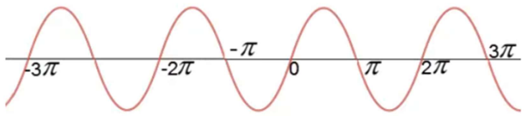
ב) האם $f(x)$ גזירה ברציפות?

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) א) טור הסינוסים הינו $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi(2k-1)^3}\sin([2k-1]x)$

ב)



ג) הוכחה

ד) הוכחה

ה) טור הקוסינוסים הינו $\frac{\pi^3}{12}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8}{\pi(2k-1)^4}\cos([2k-1]x)$

ו) הוכחה

3) א) כן

ב) לא

ג) כן

4) אינסוף פעמים

5) א) הוכחה

ב) $g(x)=-\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{\pi^2}{6}x$

6) הוכחה

7) א) הוכחה

ב) הוכחה

8) א) הוכחה

ב) הוכחה

9) א) הוכחה

ב) הוכחה

10) א) כן

ב) לא

קצב דעיכת מקדמי פורייה

משפט 1:

נניח כי $f(x)$ מחזורית- 2π

אם $f(x)\in C^{k-1}$ (גזירה ברציפות $k-1$ פעמים) ו - $f^{(k)}(x)$ רציפה למקוטעין

אז $\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^k a_n\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|n^k b_n\right|=\lim\limits_{|n|\to\infty}\left|n^k c_n\right|=0$

משפט 2:

נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית- 2π. נסמן $f(x)\sim\sum\limits_{-\infty}^{\infty}c_n e^{inx}$

נניח כי קיימים: $k\geq 0$ שלם, $\varepsilon>0$, $c>0$ ממשיים כך ש $\left|c_n\right|\leq\dfrac{c}{|n|^{1+k+\varepsilon}}$ לכל $n\neq 0$

אז $f(x)$ גזירה k פעמים ברציפות.

הערות:

א) לפעמים מסמנים $\alpha=1+\varepsilon$ ואומרים כי $\alpha>1$

ב) המשפט תקף באופן דומה עבור טור פורייה ממשי

11) נגדיר $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(nx)}{n^4}$

הוכיחו כי $f(x)$ אינה גזירה 4 פעמים ברציפות

12) נגדיר $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2}{n^{3.1}+i\cdot n^{2.2}}\cdot e^{inx}$

הוכיחו כי $f(x)$ גזירה פעמיים ברציפות

התכנסות במידה שווה של טורי פורייה

<u>משפט:</u>

נניח כי מתקיימים התנאים הבאים

א) $f(x)$ פונקציה רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$

ב) $f(-\pi)=f(\pi)$

ג) $f(x)$ גזירה ברציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$

אז טור פורייה של $f(x)$ מתכנס אליה במ"ש בקטע $[-\pi,\pi]$

<u>משפט (הכללה של המשפט הקודם):</u>

נניח כי $f(x),f'(x)$ רציפות למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$

אז טור פורייה של $f(x)$ מתכנס ל $\tilde{f}(x)$ (ההמשכה המחזורית של $f(x)$) במ"ש בכל קטע $[a,b]$ שאינו מכיל נקודות אי רציפות של $\tilde{f}(x)$.

שאלות

1) תהי הפונקציה $g(x)=\begin{cases}-x & -\pi\le x<0\\ \pi-x & 0\le x<\pi\end{cases}$

א) חשבו את טור הפורייה הממשי של $g(x)$

ב) עבור $x\in[-\pi,\pi]$ נגדיר את הפונקציה $h(x)=a\sin\left(\frac{x}{2}\right)+\int\limits_{-\pi}^{x}g(t)\,dt$

עבור אילו ערכי a מתכנס טור פורייה של $h(x)$ במ"ש ב $[-\pi,\pi]$?

2) נגדיר $f(x)=|\sin(x)|$ במרחב $L^2_{PC}[-\pi,\pi]$ ונסמן $f'(x)$ הנגזרת שלה

א) חשבו את טורי פורייה ממשיים של $f(x),f'(x)$

ב) לאילו פונקציות מתכנסים נקודתית טורי הפורייה שחישבתם?

שרטטו את הגרפים של הפונקציות האלו בתחום $[-3\pi,3\pi]$

ג) באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של $f(x)$ במ"ש?

ד) באילו קטעים סגורים מתכנס טור הפורייה של $f'(x)$ במ"ש?

תשובות סופיות

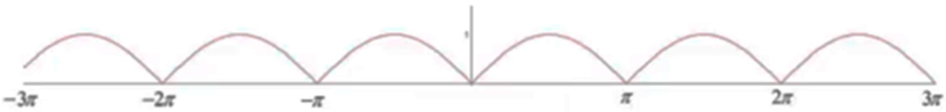
1) א) $g(x) \sim \frac{\pi}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2k\cdot x)$

ב) $a=-\frac{\pi^2}{2}$

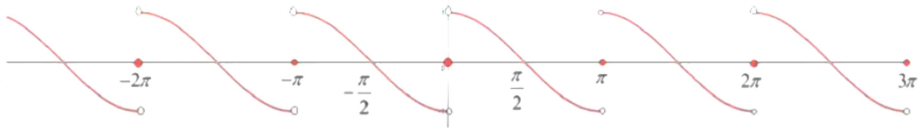
2) א) $f(x) \sim \frac{2}{\pi}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{-4}{(2k+1)(2k-1)}\right]\cos(2k\cdot x)$

$$f'(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\left[\frac{8k}{(2k+1)(2k-1)}\right]\sin(2k\cdot x)$$

ב) טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס נקודתית לפונקציה הזאת -



טור הפורייה של $f'(x)$ מתכנס נקודתית לפונקציה הזאת -



ג) טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס אליה במ"ש על כל הישר הממשי

ד) בקטעים מהצורה $\left[\pi n+\delta,\pi(n+1)-\delta\right]$ לכל n שלם ולכל $0<\delta<\pi$

טור פורייה בקטע כללי

בהינתן פונקציה רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$ (לעתים נרשום $f \in L^2_{PC}[a,b]$)

<u>טור פורייה ממשי</u>

נסמן $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right)$

הטור באגף ימין נקרא טור הפורייה הממשי של $f(x)$ בקטע $[a,b]$

והמקדמים נתונים ע"י

$$a_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right)dx$$

$$b_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right)dx$$

<u>טור פורייה מרוכב</u>

נסמן $f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}$

הטור באגף ימין נקרא טור הפורייה המרוכב של $f(x)$ בקטע $[a,b]$

והמקדמים נתונים ע"י $c_n = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)e^{-i\frac{2\pi n}{b-a}x}dx$

<u>שיוויון פרסבל</u>:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2 dx = \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 + |b_n|^2$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b |f(x)|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2$$

<u>שיוויון פרסבל מוכלל</u>:

אם בנוסף $g(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right) + B_n \sin\left(\frac{2\pi n}{b-a}x\right)$ או $g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}$

אזי $$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{a_0\overline{A_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{A_n} + b_n\overline{B_n}$$

ו - $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\overline{C_n}$$

גזירה איבר איבר:

נניח כי מתקיימים התנאים הבאים

א) $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$

ב) $f(a)=f(b)$

ג) $f(x)$ גזירה ברציפות למקוטעין בקטע $[a,b]$

אז ניתן לגזור איבר איבר את טור הפורייה של $f(x)$ ולקבל את טור הפורייה של $f'(x)$. למשל, אם נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}$ אז $f'(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}i\frac{2\pi n}{b-a}c_n e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}$

ועבור הטור הממשי באופן דומה.

אינטגרציה איבר איבר:

אם $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[a,b]$ אז ניתן לבצע אינטגרציה איבר איבר לטור הפורייה של $f(x)$. למשל, אם נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}$ אז לכל $x\in[a,b]$ מתקיים:

$$\int_a^x f(t)dt=c_0(x-a)+\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty}\frac{b-a}{2\pi in}c_n\left[e^{i\frac{2\pi n}{b-a}x}-e^{i\frac{2\pi n}{b-a}a}\right]$$

הערות:

1. הטור באגף בימין (כולל הפוני הלינארית) מתכנס במ"ש לפוני באגף שמאל.
2. רק אם $c_0=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx=0$ אגף ימין ייקרא טור פורייה.
3. באופן דומה עבור טור פורייה ממשי

טור קוסינוסים:

נניח כי נתונה לנו פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,L]$, אז

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx \qquad f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

נקרא הפיתוח של $f(x)$ לטור קוסינוסים בקטע $[0,L]$

טור סינוסים:

נניח כי נתונה לנו פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[0,L]$, אז

$$b_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)dx \qquad f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right)$$

נקרא הפיתוח של $f(x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,L]$

שאלות

1) חשבון טור פורייה ממשי לפונקציה $f(x)=x^2$ בקטע $[0,2\pi]$

2) תהי הפונקציה $f(x)=\min\{1,|x|\}$

א) חשבון את המקדמים a_n,b_n של טור פורייה ממשי של f בקטע $[-2,2]$

ב) חשבון את $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}$ ו - $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}$

3) תהי הפונקציה $f(x)=e^{\frac{x}{2}}$ בקטע $[0,2]$

א) פתחו את הפונקציה לטור פורייה מרוכב

ב) לאיזו פונקציה מתכנס הטור? שרטטו את גרף הפונקציה (לפחות 3 מחזורים)

ג) חשבון את סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2 n^2}$

4) פתחו את הפונקציה $f(x)=|x|$ לטור פורייה בקטע $[-1,1]$

5) פתחו את הפונקציה $f(x)=\begin{cases} x & 0\le x\le 1 \\ 2-x & 1<x<2 \end{cases}$ לטור סינוסים בקטע $[0,2]$

6) נתונה פונקציה $f(x)$ המקיימת $f(x)=f(x+2)$ ובנוסף

$$f(x)=2-|x| \qquad , \qquad -1\le x\le 1$$

א) פתחו את הפונקציה לטור פורייה ממשי

ב) חשבון את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}$

ג) חשבון את סכום הטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}$

ד) האם טור הפורייה של $f(x)$ מתכנס במ"ש בקטע $[-1,1]$?

7) פתחו את הפונקציה $f(x)=x$ לטור קוסינוסים בקטע $[0,3]$

8) פתחו את הפונקציה $f(x)=\cos(2x)$ לטור סינוסים בקטע $[0,\pi]$

תשובות סופיות

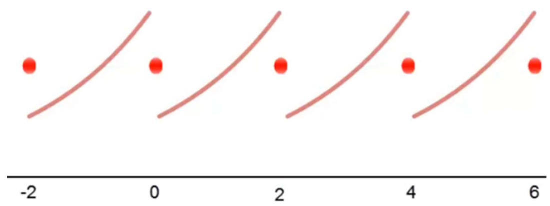
1) $$x^2 \sim \frac{4\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos(nx)-\frac{\pi\pi}{n}\sin(nx)$$

2) א) $b_n=0$, $$a_n=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi^2(2k-1)^2} & n=2k-1\\ -\dfrac{8}{\pi^2(4k-2)^2} & n=4k-2\\ 0 & else\end{cases}$$

ב) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}==\frac{\pi^4}{96} \qquad \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

3) א) $$f(x)\sim\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{(e-1)(1+2\pi in)}{1+4\pi^2n^2}e^{i\pi nx}$$

ב)



ג) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+4\pi^2n^2}=\frac{3-e}{4(e-1)}$$

4) $$|x|\sim\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(\pi[2k-1]x)$$

5) $$f(x)\sim\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-8\cos(\pi k)}{\pi^2(2k-1)^2}\sin\left(\frac{\pi[2k-1]x}{2}\right)$$

6) א) $$f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{4}{(2k-1)^2\pi^2}\cos([2k-1]\pi x)$$

ב) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

ג) $$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

ד) כן

7) טור הקוסינוסים הינו $$f(x)\sim\frac{3}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-12}{\pi^2(2k-1)^2}\cos\left(\frac{\pi[2k-1]}{3}x\right)$$

8) טור הסינוסים הינו $$f(x)\sim-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{4(2k-1)}{4-(2k-1)^2}\sin([2k-1]x)$$

קונבולוציה מחזורית

אם $f(x), g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות - 2π נגדיר

$$(f*g)_{(x)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,dt$$

<u>משפט הקונבולוציה עבור טורי פורייה:</u>

אם $f(x), g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות - 2π נסמן

$$f(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} f_n e^{inx} \qquad , \quad g(x) \sim \sum_{-\infty}^{\infty} g_n e^{inx}$$

אז מתקיים $(f*g)_{(x)} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} (f_n \cdot g_n) e^{inx}$

שאלות

1) הוכיחו כי אם $f(x), g(x)$ רציפות למקוטעין ומחזוריות - 2π

אז $(f*g)_{(x)}$ מחזורית - 2π

2) הוכיחו כי אם $f(x), g(x)$ רציפות למקוטעין מחזוריות - 2π וזוגיות

אז $(f*g)_{(x)}$ פונקציה זוגית

3) נתונה $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזורית - 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$f(x) = \sqrt{2\pi}\cdot \chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(x)$$

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$.

הערה: $\chi_{[a,b]}(x) = \begin{cases} 1 & x\in[a,b] \\ 0 & else \end{cases}$

4) נתונה $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזורית - 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$f(x)=x^2$$
$$g(x)=\cos(x)$$

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

5) נתונה $f(x)$ רציפות למקוטעין ומחזורית - 2π כך שלכל $x\in[-\pi,\pi]$ מתקיים

$$f(x)=x$$
$$g(x)=\chi_{[0,1]}(x)$$

חשבו לכל x ממשי את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$.

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) הוכחה

3) $(f*f)_{(x)}$ מחזורית- 2π ובתחום $[-\pi,\pi]$ נתונה ע״י $(f*f)_{(x)}=\begin{cases}\pi-x & 0\le x<\pi\\ \pi+x & -\pi<x<0\end{cases}$

4) $(f*g)_{(x)}$ מחזורית- 2π ובתחום $[-\pi,\pi]$ נתונה ע״י $(f*g)_{(x)}=-2\cos(x)$

5) $(f*g)_{(x)}$ מחזורית- 2π ובתחום $[-\pi,\pi]$ נתונה ע״י

$$(f*g)_{(x)}=\begin{cases}\frac{1}{4\pi}\left[x^2-(x-1)^2\right] & -\pi+1\le x\le\pi\\ \frac{1}{4\pi}\left[x^2-(x+(2\pi-1))^2\right] & -\pi\le x\le-\pi+1\end{cases}$$

גרעין דיריכלה

הגדרה: גרעין דיריכלה זו סדרת פונקציות המוגדרת באופן הבא: $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx}$

שאלות

1) א) הוכיחו כי $D_n(x)=1+2\sum_{k=1}^{k=n}\cos(kx)$

ב) הוכיחו כי $D_n(x)=\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ לכל $x\neq 2\pi m$ (עבור m שלם)

2) חשבו לכל n שלם את הביטוי $I(n)=\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{1}{2\pi}\dfrac{\sin\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\sin(100x)\,dx$

3) הוכיחו כי לכל $n\in\mathbb{N}$ את הזהות הבאה:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)\left[\sin\left(\frac{1}{2}x\right)+\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right]}{\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)}dx=2(n+1)$$

4) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין בקטע $[-\pi,\pi]$

נסמן $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n}c_k e^{ikx}$ טור פורייה חלקי של $f(x)$

הוכיחו כי $(f*D_n)_{(x)}=S_n(x)$ לכל $n\in\mathbb{N}$

שימו לב לקשר המעניין הנ"ל! טור פורייה חלקי מתקבל ע"י קונבולוציה מחזורית בין הפונקציה לגרעין דיריכלה.

5) חשבו את הגבול $\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\arctan(x-1)\cdot\sin\left(\left[n+\frac{1}{2}\right]x\right)}{e^{(x-1)^2}\sin\left(\frac{1}{2}x\right)}dx$

6) נגדיר $S(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2001}{2}t\right)}{\sin(t)}2\cos\left(\frac{t}{2}\right)\cos^{17}\left(e^{\sqrt{|x-t|}}\right)dt$

יהיו a_n,b_n מקדמי פורייה הממשיים ו - c_n מקדמי פורייה המרוכבים של $S(x)$

חשבו את b_{500} ו - c_{1001}.

רמז: התבוננו בביטוי מהצורה $S_N(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_N(t)f(x-t)dt$

כאשר $D_N(t)$ גרעין דיריכלה ו - $S_N(x)$ טור פורייה חלקי של פונקציה $f(x)$

תשובות סופיות

1) א) הוכחה ב) הוכחה

2) $I(n)=0$

3) הוכחה

4) הוכחה

5) $-\frac{\pi^2}{2e}$

6) $b_{500}=0\ ,\ c_{1001}=0$

גרעין פייר וממוצעי סזארו

כזכור, הגדרנו את גרעין דיריכלה באופן הבא - $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx}$. כעת נגדיר את גרעין פייר $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n} D_k(x)$, כלומר גרעין פייר הינו ממוצע של גרעיני דיריכלה.

שאלות

1) א) הוכיחו כי $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\frac{\sin^2\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$ לכל $x\neq 2\pi m$ (עבור m שלם)

ב) הוכיחו כי $K_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n}\left(1-\frac{|k|}{n+1}\right)e^{ikx}$

2) הוכיחו כי $K_n(x)\geq 0$ לכל x ממשי

3) הוכיחו כי $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx=1$

4) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0<|x|<\delta} K_n(x)\,dx\right)=0$

גרעין סומביליות חיובי:

סדרת פונקציות רציפות למקוטעין ומחזוריות - 2π, $F_n(x)$, תקרא גרעין (סומביליות) חיובי אם היא מקיימת את שלושת התכונות הבאות:

1) $F_n(x)\geq 0$ לכל x ממשי

2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F_n(x)dx=1$

3) לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{0<|x|<\delta}F_n(x)dx\right)=0$

הערה: מתרגילים 2-4 בעמוד הקודם נובע כי גרעין פייר הוא גרעין סומביליות חיובי

ממוצעי סזארו

בהינתן פונקציה רציפה למקוטעין $f(x)$ ומחזורית - 2π

נגדיר עבורה סדרת פונקציות הנקראת ממוצעי סזארו:

$$\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n}S_k(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+...+S_n(x)}{n+1}$$

כלומר ממוצע סזארו מוגדר כממוצע של טורי פורייה חלקיים

ומתקיים הקשר הבא - $\sigma_n(x)=(K_n*f)_{(x)}$

כלומר ממוצע סזארו הינו קונבולוציה בין גרעין פייר לפונקציה.

סיכום קצר

גרעין דיריכלה: $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n}e^{ikx}$ טור פורייה חלקי של $f(x)$: $S_n(x)=\sum_{k=-n}^{k=n}c_ke^{ikx}$ הקשר גרעין דיריכלה לטור פורייה חלקי: $(f*D_n)_{(x)}=S_n(x)$
גרעין פייר: $K_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n}D_k(x)$ ממוצעי סזארו: $\sigma_n(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{k=n}S_k(x)$ הקשר גרעין פייר לממוצעי סזארו: $\sigma_n(x)=(K_n*f)_{(x)}$

5) נניח כי $f(x)$ רציפה למקוטעין, מחזורית- 2π וכי $m \le f(x) \le M$ לכל x
הוכיחו כי $m \le \sigma_n(x) \le M$ לכל n טבעי ולכל x ממשי.

6) תהי $\varphi(x)$ רציפה בקטע $[-\pi,\pi]$ ונניח כי
1) $\varphi(x)(x) \ge 0$ לכל x ממשי
2) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)dx = 1$
3) קיים $0<\delta_0<\pi$ כך שלכל $|x|>\delta_0$ מתקיים $\varphi(x)=0$

נגדיר $F_n(x)=n\cdot\varphi(nx)$ ונרחיב אותה באופן מחזורי. הוכיחו כי $F_n(x)$ גרעין חיובי.

גרעין פוואסון

גרעין פוואסון מוגדר באופן הבא $P_r(x)=\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}$

שאלות

1) א) הוכיחו כי לכל $0<r<1$ מתקיים $\dfrac{1-r^2}{1-2r\cos(x)+r^2}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{inx}$

ב) תהי $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית - 2π עם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

הראו כי $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}=\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$

ג - 1) הוכיחו כי $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי

ג - 2) הוכיחו כי לכל $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$

במידה שווה בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$

ג - 3) הוכיחו כי $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$

ד) תהי $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית - 2π עם טור פורייה $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$

הראו כי $f(x)\xrightarrow{r\to 1-}\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n r^{|n|}e^{inx}$ במ"ש ב $[-\pi,\pi]$

הערה: תוכלו להיעזר במשפט הבא –

אם סדרת פונקציות $P_r(x)$ מקיימת את התכונות הבאות:

1) $P_r(x)\ge 0$ לכל x ממשי

2) $0<\delta<\pi$ מתקיים $P_r(x)\xrightarrow{r\to 1-}0$ במ"ש בתחום $[-\pi,-\delta]\cup[\delta,\pi]$

3) $\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(x)\,dx=1$

אז $f(x)\xrightarrow{r\to 1-}\dfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)P_r(t)\,dt$ במ"ש ב $[-\pi,\pi]$

תרגילים מסכמים

שאלות

1) א) מצאו טור פורייה של הפונקציה $f(t)=e^{i\alpha t}$ בתחום $-\pi\le t\le\pi$
כאשר α הוא מספר ממשי לא שלם.

ב) הראו שמתקיים $\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2\alpha}{\left[\alpha^2-n^2\right]}=\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}-\frac{1}{\alpha}$

ג) הראו שמתקיים $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\frac{1}{[\alpha-n]^2}=\frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}$

ד) הראו שמתקיים $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left((2n+1)^2-\alpha^2\right)}=\frac{\pi}{4\alpha^2}\left(\frac{1}{\cos\left(\alpha\frac{\pi}{2}\right)}-1\right)$

2) נגדיר $f(x)=|x|$ במרחב $L^2_{PC}([-\pi,\pi])$ ונסמן ב $f'(x)$ את הנגזרת שלה.

א) חשבו טור פורייה ממשי של f

ב) לאיזו פונקציה מתכנס הטור

$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots$$

נקודתית בתחום $(-\infty,\infty)$?

ג) חשבו את הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2$

3) תהי $f\in L^2_{PC}\left(\left[-\pi,\pi\right]\right)$. נסמן ב c_n את מקדמי פורייה (המרוכבים) של f .

נסמן $d_n=\operatorname{Re}\left\{c_n\right\}$ ובנוסף נתון כי :

א) f ממשית

ב) f מתאפסת על הקטע $\left[-\pi,0\right]$

ג) מתקיים השיוויון $\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} d_n e^{inx}=x^2e^{|x|}\cos(x)$

מצאו את f .

4) תהי f פונקציה זוגית בעלת מחזור 2π המקיימת $f(x)=\cos\left(2x\right)$ בתחום $0\le x\le\frac{\pi}{2}$ ו $f(x)=-1$ בתחום $\frac{\pi}{2}\le x\le\pi$.

מצאו את טור פורייה הממשי של f וחשבו את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\left[2n-1\right]\left[2n+3\right](2n+1)}$

האם טור פורייה של f מתכנס אליה במידה שווה? נמקו.

5) נתונה פונקציה $f(x)$ רציפה למקוטעין ומחזורית 2π .

נסמן $f(x)\sim\sum_{n=-\infty}^{n=\infty} f_n e^{inx}$ ויהי $h>0$ פרמטר כולשהו.

מצאו את מקדמי פורייה של $h(x)=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(t+x)dt$ כתלות ב f_n .

תשובות סופיות

1) א) $e^{i\alpha t} \sim \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(\pi\alpha)}{[\alpha-n]\pi} e^{in\cdot t}$

ב) הוכחה

ג) הוכחה

ד) הוכחה

2) א) $f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2k+1)^2} \cos([2k+1]x)$

ב)
$$\sin(x)+\frac{1}{3}\sin(3x)+\frac{1}{5}\sin(5x)+\frac{1}{7}\sin(7x)+\ldots = \begin{cases} \frac{\pi}{4} & \pi k < x < \pi(k+1) \\ -\frac{\pi}{4} & \pi(k-1) < x < \pi k \\ 0 & x = \pi k \end{cases}$$

כאשר k מספר שלם.

ג) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^2 = \frac{\pi^2}{8}$

3) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 e^{|x|}\cos(x) & 0 < x < \pi \\ 0 & -\pi < x \le 0 \end{cases}$

4) .1 $f(x) \sim -\frac{1}{8} + \frac{1}{8}\cos(2x) + \sum_{\substack{n=1 \\ n\neq 2}}^{\infty} \frac{1}{\pi}\left[\frac{n}{4-n^2} - \frac{1}{n}\right] \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) \cos(nx)$

.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{[2n-1][2n+3](2n+1)} = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{8}$

.3 הטור מתכנס במ״ש

5) $h_n = f_n \cdot \frac{\sin(n\cdot h)}{n\cdot h}$