התמרת פורייה

הקדמה

פונקציה רציפה למקוטעין:

פונקציה $f\left(x\right)$ תקרא רציפה למקוטעין בקטע סופי $\left[a,b\right]$ אם יש מספר סופי של נקודות $a=x_0<x_1<...<x_{n+1}=b$ כך ש –

א) $f\left(x\right)$ רציפה בקטעים $\left(x_k,x_{k+1}\right)$ לכל $0\le k\le n$

ב) בנקודות הפנימיות $x_1,...,x_n$ הגבולות החד-צדדיים קיימים וסופיים:

$$\lim_{x\to x_k-} f\left(x\right) \quad , \quad \lim_{x\to x_k+} f\left(x\right) \qquad \forall 1\le k\le n$$

ג) בקצוות הגבולות החד-צדדים גם קיימים וסופיים: $\lim_{x\to b-} f\left(x\right)$, $\lim_{x\to a+} f\left(x\right)$

<u>**הערה:**</u> פונקציה $f\left(x\right)$ תקרא רציפה למקוטעין בתחום אינסופי I

אם בכל תת-קטע סופי $\left[a,b\right]\subset I$ הפונקציה $f\left(x\right)$ רציפה למקוטעין.

אינטגרלים של פונקציות זוגיות ואי זוגיות

הגדרה: $f(x)$ תקרא פונקציה זוגית אם $f(x)=f(-x)$

הגדרה: $f(x)$ תקרא פונקציה אי-זוגית אם $f(x)=-f(-x)$

תכונות:

1) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ זוגית אזי $f(x)g(x)$ זוגית

2) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $f(x)g(x)$ אי-זוגית

3) אם $f(x)$ אי-זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $f(x)g(x)$ זוגית

4) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ זוגית אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ זוגית

5) אם $f(x)$ זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית (או הפוך) אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ אי-זוגית

6) אם $f(x)$ אי-זוגית ו - $g(x)$ אי-זוגית אזי $\frac{f(x)}{g(x)}$ זוגית

כדאי לחשוב במקרים 1-6 על פונקציה זוגית כמו + ופונקציה אי-זוגית כמו –

7) אם $f(x),g(x)$ זוגיות אז $f(g)\pm g(x)$ זוגית

8) אם $f(x),g(x)$ אי-זוגיות אז $f(g)\pm g(x)$ אי-זוגית

אינטגרלים:

אם $f(x)$ אי-זוגית אז $\int_{-L}^{L} f(x)dx=0$ (אינטגרל של פונ' אי זוגית בקטע סימטרי)

אם $f(x)$ זוגית אז $\int_{-L}^{L} f(x)dx=2\int_{0}^{L} f(x)dx$ (אינטגרל של פונ' זוגית בקטע סימטרי)

מבוא כללי

המרחב עמו נעבוד הוא המרחב $G=L_{PC}^{1}\left(\mathbb{R}\right)$ - מרחב כול הפונקציות

הרציפות למקוטעין והאינטגרביליות בהחלט, כלומר אלו המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}\left|f(x)\right|dx<\infty$

<u>הגדרה:</u> אם $f\in G$ אזי נגדיר את התמרת הפורייה שלה: $\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\omega x}dx$

כאשר ω משתנה ממשי.

לעתים נסמן $F\left\{f\left(x\right)\right\}=\widehat{f}(\omega)$ - התמרת הפורייה של f.

<u>הערה:</u> יש מספר הגדרות שונות להתמרת פורייה ועבור הגדרות שונות – הנוסחאות הרלוונטיות שונות במעט, כפי שניתן לראות בעמוד הבא

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

הגדרה 3	**הגדרה 2**	**הגדרה 1**
$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$	$\widehat{f}(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$	$\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\omega x}dx$
$F\left\{f(ax+b)\right\}=\frac{1}{\lvert a\rvert}e^{\frac{i\omega b}{a}}\widehat{f}(\frac{\omega}{a})$		
$F\left\{\cos(cx)f(x)\right\}=\frac{\widehat{f}(\omega-c)+\widehat{f}(\omega+c)}{2}$, $F\left\{\sin(cx)f(x)\right\}=\frac{\widehat{f}(\omega-c)-\widehat{f}(\omega+c)}{2i}$		
$F\left\{f^{(n)}(x)\right\}=\left(i\omega\right)^{n}\widehat{f}(\omega)$		
$F\left\{x^{n}f(x)\right\}=\left(i\right)^{n}\frac{d^{n}}{d\omega^{n}}\widehat{f}(\omega)$		
$F\left\{\left(f*g\right)_{(x)}\right\}=\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$	$F\left\{\left(f*g\right)_{(x)}\right\}=\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$	$F\left\{\left(f*g\right)_{(x)}\right\}=2\pi\widehat{f}(\omega)\widehat{g}(\omega)$
$\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	$\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$	$\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$
$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$
$F\left\{F\left\{f(x)\right\}\right\}=f(-x)$	$F\left\{F\left\{f(x)\right\}\right\}=2\pi f(-x)$	$F\left\{F\left\{f(x)\right\}\right\}=\frac{1}{2\pi}f(-x)$

בקורס הזה אנחנו נשתמש בהגדרה 1
(את כל הנוסחאות הנ"ל נלמד בהמשך)

<u>תכונות של התמרת פורייה:</u>

1) ליניאריות $F\{\alpha\cdot f(x)+\beta\cdot g(x)\}=\alpha\cdot F\{f(x)\}+\beta\cdot F\{g(x)\}$

עבור $f(x),g(x)\in G$ ו - $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ סקלרים

2) אם $f(x)\in G$ אזי התמרת הפורייה $\widehat{f}(\omega)$ רציפה

3) אם $f(x)\in G$ אזי $\lim\limits_{\omega\to\pm\infty}\widehat{f}(\omega)=0$ (הלמה של רימן-לבג)

4) אם $f(x)$ ממשית, אז $\overline{\widehat{f}(\omega)}=\widehat{f}(-\omega)$

5) אם $f(x)$ זוגית אז $\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f(x)\cos(\omega x)dx$

6) אם $f(x)$ אי זוגית אז $\widehat{f}(\omega)=-\frac{i}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin(\omega x)dx$

<u>התמרות פורייה נפוצות:</u>

1) $F\{\chi_{[-1,1]}\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$ כאשר $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

2) $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

3) $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

כתב ופתר – גיא רוטמן © Guy86222@gmail.com

שאלות

חשבו התמרת פורייה עבור הפונקציות הבאות

1) $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

2) $f(x)=\begin{cases}1-|x| & |x|<1\\ 0 & else\end{cases}$

3) $f(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$

4) $f(x)=\begin{cases}1 & |x|\le 1\\ 2 & 1<|x|<2\\ 0 & else\end{cases}$

5) $f(x)=\begin{cases}e^{-ax} & x>0\\ e^{bx} & x\le 0\end{cases}$ כאשר $a,b>0$ קבועים

6) $f(x)z\begin{cases}1 & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

7) $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x<1\\ 2 & 1\le x<2\\ 0 & else\end{cases}$

8) $f(x)=\begin{cases}e^{x} & 0<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

9) $f(x)=\begin{cases}e^{2ix} & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

10) $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & -1<x<1\\ 0 & else\end{cases}$

11) $f(x)=\begin{cases}x & |x|<a\\ 0 & else\end{cases}$ עבור $a>0$

12) האם קיימת $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש - $\hat{f}(\omega)=\begin{cases}1-|\omega| & |\omega|\le\frac{1}{2}\\ 0 & else\end{cases}$?

תשובות סופיות

1) $F\left\{\chi_{[-1,1]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega)}{\pi\omega}$

2) $\hat{f}(\omega)=\frac{1-\cos(\omega)}{\pi\omega^{2}}$

3) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi(1+i\omega)}$

4) $\hat{f}(\omega)=\frac{2\sin(2\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega}$

5) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{b-i\omega}+\frac{1}{a+i\omega}\right]$

6) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\omega)+i\left[\cos(\omega)-1\right]}{\omega}$

7) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{1+e^{-i\omega}-2e^{-i2\omega}}{i\omega}$

8) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{1-i\omega}-1}{1-i\omega}$

9) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin(2-\omega)}{2-\omega}$

10) $\hat{f}(\omega)=-i\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\sin(1-\omega)}{1-\omega}-\frac{\sin(1+\omega)}{1+\omega}\right\}$

11) $\hat{f}(\omega)=-\frac{1}{\pi}i\frac{\sin(\omega a)-\omega a\cos(\omega a)}{\omega^{2}}$

12) לא.

נוסחת כיווץ והזזה

בהינתן $f\in G$ ו - $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש $a\neq 0$ מתקיים $F\left\{f\left(ax+b\right)\right\}=\frac{1}{|a|}e^{\frac{i\omega b}{a}}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

שימו לב למקרים פרטיים חשובים:

א) אם $a=1$ מקבלים את נוסחת ההזזה $F\left\{f\left(x+b\right)\right\}=e^{i\omega b}\widehat{f}\left(\omega\right)$

ב) אם $b=0$ מקבלים את נוסחת הכיווץ $F\left\{f\left(ax\right)\right\}=\frac{1}{|a|}\widehat{f}\left(\frac{\omega}{a}\right)$

שאלות

חשבו התמרת פורייה עבור הפונקציות הבאות

1) בעזרת נוסחת כיוון והזזה מצאו התמרת פורייה של $\chi_{[-r,r]}\left(x\right)=\begin{cases}1 & x\in[-r,r]\\ 0 & else\end{cases}$
כאשר $r>0$.

2) מצאו התמרת פורייה של $f\left(x\right)=e^{-4x^2-4x-1}$
ע״י שימוש בעובדה ש $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) נתונה פונקציה $g\left(x\right)\in G$ בעלת התמרת פורייה $\widehat{g}\left(\omega\right)$
מצאו פונקציה $f\left(x\right)$ (כתלות ב $g\left(x\right)$) בעלת התמרת פורייה $\widehat{g}\left(\omega\right)\cos\left(\omega\right)$

4) מצאו התמרת פורייה של $f\left(x\right)=e^{-ax^2}$ כאשר $a>0$
רמז: $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) מצאו פונקציה $f\left(x\right)$ שהתמרת הפורייה שלה היא $\widehat{f}\left(\omega\right)=\cos\left(4\pi\omega\right)\frac{\sin\left(2\omega\right)}{\omega}$
רמז: $F\left\{\chi_{[-1,1]}\right\}=\frac{\sin\left(\omega\right)}{\pi\omega}$

תשובות סופיות

1) $$F\left\{\chi_{[-r,r]}(x)\right\}=\frac{\sin(\omega\cdot r)}{\pi\omega}$$

2) $$\hat{f}(\omega)=\frac{e^{i\frac{\omega}{2}}}{4\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{16}}$$

3) $$f(x)=\frac{g(x+1)+g(x-1)}{2}$$

4) $$\hat{f}(\omega)=\frac{1}{2\sqrt{\pi a}}e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$$

5) $$f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & 4\pi-2\le x\le 4\pi+2 \quad \text{or} \quad -4\pi-2\le x\le -4\pi+2\\ 0 & else\end{cases}$$

נוסחת כפל באקספוננט ומודולציה

נניח כי $f \in G$ ו - $c \in \mathbb{R}$

נוסחת כפל באקספוננט: $F\left\{f(x)\cdot e^{icx}\right\} = \widehat{f}(\omega - c)$

נוסחאות המודולציה: $F\left\{f(x)\cdot \cos(cx)\right\} = \dfrac{\widehat{f}(\omega-c)+\widehat{f}(\omega+c)}{2}$

$$F\left\{f(x)\cdot \sin(cx)\right\} = \frac{\widehat{f}(\omega-c)-\widehat{f}(\omega+c)}{2i}$$

שאלות

1) הוכיחו כי $F\left\{\sin(cx)e^{-|x|}\right\} = \dfrac{1}{\pi i}\dfrac{2c\cdot\omega}{\left[1+(\omega-c)^2\right]\left[1+(\omega+c)^2\right]}$ עבור $c \in \mathbb{R}$

2) מצאו פונקציה $f(x)$ כך ש $\widehat{f}(\omega) = \dfrac{\sin(\omega-1)}{\omega-1} - \dfrac{\sin(\omega+1)}{\omega+1}$

3) הוכיחו כי התמרת הפורייה של $g(x) = \begin{cases} \sin(ax)e^{-bx} & x>0 \\ 0 & x \le 0 \end{cases}$

כאשר $a,b>0$ קבועים היא $\widehat{g}(\omega) = \dfrac{1}{4\pi}\left[\dfrac{1}{bi-(\omega-a)} - \dfrac{1}{bi-(\omega+a)}\right]$

4) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|}\cos(2x)$ על ידי שימוש בנוסחת המודולציה ובעובדה ש $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \dfrac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

5) מצאו התמרת פורייה של $g(x) = e^{-|x|}\sin^2(3x)$ על ידי שימוש בנוסחת המודולציה ובעובדה ש $F\left\{e^{-|x|}\right\} = \dfrac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

6) נניח כי $f \in G(\mathbb{R})$ ונגדיר $g(x) = f(3x-2)\cdot\cos(x)$

בטאו את $\widehat{g}(\omega)$ על ידי $\widehat{f}(\omega)$

7) מצאו פונקציה $f(x)$ כך ש $\hat{f}(\omega)=e^{3i\omega}\cdot e^{-|\omega-2|}$

רמז: תוכלו להשתמש בעובדה ש $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$

8) תהי $H(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$. חשבו את התמרת הפורייה של הפונקציות הבאות

א) $H(x)e^{-ax}$ עבור $a>0$

ב) $H(x)e^{-ax}\cos(bx)$ עבור $a,b>0$

ג) $H(x)e^{-ax}\sin(bx)$ עבור $a,b>0$

תשובות סופיות

1) הוכחה

2) $f(x)=2\pi i\cdot\chi_{[-1,1]}\cdot\sin(x)$

3) הוכחה

4) $F\left\{e^{-|x|}\cos(2x)\right\}=\frac{1}{2\pi\left[1+(\omega+2)^2\right]}+\frac{1}{2\pi\left[1+(\omega-2)^2\right]}$

5) $\hat{g}(\omega)=\frac{1}{2}\frac{1}{\pi\left(1+\omega^2\right)}-\left[\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega+6]^2\right)}+\frac{1}{2\pi\left(1+[\omega-6]^2\right)}\right]$

6) $\hat{g}(\omega)=\frac{1}{6}\left[e^{-i\frac{2}{3}(\omega+1)}\hat{f}\left(\frac{\omega+1}{3}\right)+e^{-i\frac{2}{3}(\omega-1)}\hat{f}\left(\frac{\omega-1}{3}\right)\right]$

7) $f(x)=e^{2i(x+3)}\frac{2}{1+(x+3)^2}$

8) א) $F\left\{H(x)\cdot e^{-ax}\right\}=\frac{1}{2\pi(a+i\omega)}$

ב) $F\left\{H(x)\cdot e^{-ax}\cdot\cos(bx)\right\}=\frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{a+i(\omega-b)}+\frac{1}{a+i(\omega+b)}\right]$

ג) $F\left\{H(x)\cdot e^{-ax}\cdot\sin(bx)\right\}=\frac{1}{4\pi i}\left[\frac{1}{a+i(\omega-b)}-\frac{1}{a+i(\omega+b)}\right]$

נוסחת ההתמרה הכפולה

אם $f,\hat{f}\in G$ ו- f רציפה אז $F\{F\{f(x)\}\}=\frac{1}{2\pi}f(-x)$

שאלות

1) מצאו התמרת פורייה של $\frac{1}{1+x^2}$ על ידי נוסחת ההתמרה הכפולה
וחשבו התמרת פורייה של $\frac{\sin^2(x)}{1+x^2}$

2) הוכיחו כי $F\left\{\frac{1}{x^2+b^2}\right\}=\frac{1}{2|b|}e^{-|\omega b|}$ לכל $b\neq 0$ ממשי

3) מצאו התמרת פורייה של $\frac{\cos(ax)}{a^2+x^2}$ עבור $a>0$

4) מצאו התמרת פורייה של $\frac{\cos(bx)}{a^2+x^2}$ עבור $a,b>0$

5) מצאו פונקציה שהתמרת הפורייה שלה היא $\hat{f}(\omega)=e^{-2\omega^2+3}$

תשובות סופיות

1) $F\left\{\frac{\sin^2(x)}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{4}e^{-|\omega|}-\frac{1}{8}\left(e^{-|\omega-2|}+e^{-|\omega+2|}\right)$ $\quad F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$

2) הוכחה

3) $F\left\{\frac{\cos(ax)}{a^2+x^2}\right\}=\frac{1}{4a}\left(e^{-|\omega a+a^2|}+e^{-|\omega a-a^2|}\right)$

4) $F\left\{\frac{\cos(bx)}{a^2+x^2}\right\}=\frac{1}{4a}\left(e^{-|\omega a+ab|}+e^{-|\omega a-ab|}\right)$

5) $f(x)=e^3\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-\frac{x^2}{8}}$

נוסחת הנגזרת

הגרסה הרגילה: אם $f,f'\in G$ ו - $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$ אז $F\{f'(x)\}=i\omega\hat{f}(\omega)$

הגרסה המוכללת: אם $f,f^{(k)}\in G$ ו - $\lim_{|x|\to\infty} f^{(k-1)}(x)=0$ לכל $1\le k\le n$

אז $F\left\{f^{(n)}(x)\right\}=(i\omega)^n\hat{f}(\omega)$

שאלות

1) נניח כי $f\in G$ גזירה, מקיימת $\lim_{|x|\to\infty} f(x)=0$, $f'(x)\in G$ ו - $\hat{f}(\omega)=\frac{\omega}{1+\omega^{30}}$

מצאו התמרת פורייה של $f'(x)\cos(2x)$ (אין צורך לפשט את הביטוי)

2) יהי a ממשי כולשהו. הוכיחו כי $F\left\{\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}\right\}=-\frac{1}{2}(i\omega)\frac{1}{2|a|}e^{-|\omega a|}$

3) מצאו פונקציה $f(x)$ שהתמרת פורייה שלה היא $\hat{f}(\omega)=\omega^2e^{-|\omega|}$

רמז: $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$

תשובות סופיות

1) $F\{f'(x)\cos(2x)\}=\frac{1}{2}\left[i\frac{(\omega-2)^2}{1+(\omega-2)^{30}}+i\frac{(\omega+2)^2}{1+(\omega+2)^{30}}\right]$

2) הוכחה

3) $f(x)=(-2)\frac{6x^2-2}{\left(1+x^2\right)^3}$

נוסחת המומנט

הגרסה הרגילה: אם $f(x), x\cdot f(x)\in G$ אזי $\widehat{f}(\omega)$ גזירה ברציפות ומתקיים

$$F\{x\cdot f(x)\}=i\frac{d}{d\omega}\widehat{f}(\omega)$$

הגרסה המוכללת: אם $x^k\cdot f(x)\in G$ לכל $0\le k\le n$

אז $\widehat{f}(\omega)$ גזירה n פעמים ברציפות ו - $F\{x^n f(x)\}=(i)^n\frac{d^n}{d\omega^n}\widehat{f}(\omega)$

שאלות

1) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=\begin{cases}x & x\in(-1,1)\\ 0 & else\end{cases}$ ע"י שימוש בנוסחת המומנט

2) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=x^2e^{-x^2}$ ע"י שימוש בנוסחת המומנט

ובעובדה ש $F\{e^{-x^2}\}=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) מצאו התמרת פורייה של $g(x)=xe^{-|x|}$ ע"י שימוש בנוסחת המומנט

ובעובדה ש $F\{e^{-|x|}\}=\frac{1}{\pi(1+\omega^2)}$

4) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-x^2}$

(כלומר בתרגיל זה נוכיח את הנוסחה להתמרת פורייה של גאוסיאן)

5) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=8x^3e^{\frac{-4(x+1)^2+5}{3}}$

6) תהי $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x^5} & x\ge 1\\ 0 & x<1\end{cases}$. הוכיחו כי $\widehat{f}(\omega)$ גזירה 3 פעמים ברציפות

7) נתון כי התמרת פורייה של $f\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$ רציפה היא $\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{1+|\omega|}$ פעמים

הוכיחו כי האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}|x\cdot f(x)|dx$ מתבדר.

תשובות סופיות

1) $F\{g(x)\}=i\dfrac{\omega\cos(\omega)-\sin(\omega)}{\pi\omega^2}$

2) $F\{g(x)\}=\dfrac{1}{4\sqrt{\pi}}\left(1-\dfrac{\omega^2}{2}\right)e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

3) $F\left\{x\cdot e^{-|x|}\right\}=-\dfrac{i}{\pi}\dfrac{2\omega}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

4) $F\left\{e^{-x^2}\right\}=\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

5) $\hat{f}(\omega)=\dfrac{1}{256}\sqrt{\dfrac{3}{\pi}}\left(27i\omega^3+216\omega^2-792i\omega-1088\right)e^{i\omega-\frac{3\omega^2}{16}-\frac{5}{3}}$

6) הוכחה

7) הוכחה

משפט ההתמרה הפוכה

נניח כי $f(x)\in G$, אזי בכל נקודה x שבה קיימות הנגזרות החד-צדדיות מתקיים השיוויון

$$\frac{f(x^{+})+f(x^{-})}{2}=\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\hat{f}(\omega)e^{i\omega x}d\omega$$

שאלות

1) חשבו את האינטגרל $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^{2})}d\omega$ לכל x ממשי
ע״י שימוש במשפט ההתמרה ההפוכה

2) חשבו $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega$ לכל x ממשי
ע״י שימוש במשפט ההתמרה ההפוכה

תשובות סופיות

1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(\omega x)}{\pi(1+\omega^{2})}d\omega=e^{-|x|}$

2) $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{\sin(\omega)\cos(\omega x)}{\pi\omega}d\omega=\begin{cases}0 & |x|>1\\ 1 & |x|<1\\ \frac{1}{2} & |x|=1\end{cases}$

משפט פלנשראל

הגרסה הרגילה: אם $f(x)\in G$ ו - $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$

אזי $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\left|\widehat{f}(\omega)\right|^2\,d\omega$

הגרסה המוכללת: אם $f(x),g(x)\in G$ ו - $\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^2\,dx<\infty$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2\,dx<\infty$

אזי $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx=2\pi\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{f}(\omega)\overline{\widehat{g}(\omega)}d\omega$

שאלות

1) א) חשבון התמרת פורייה של $f(x)=\chi_{[-a,a]}(x)$ עבור $a>0$

ב) חשבון את האינטגרל של $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx$ עבור $a,b>0$

2) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{e^{-x}\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{4}$. תוכלו להיעזר ב - $F\left\{\frac{1}{1+x^2}\right\}=\frac{1}{2}e^{-|\omega|}$

3) הוכיחו כי $\int_{0}^{\infty}\frac{\sin(2x)}{x(1+4x^2)}dx=\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)$

4) הוכיחו כי לא קיימת פונקציה $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})\cap L^2_{PC}(\mathbb{R})$ כך ש $\widehat{f}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{1+|\omega|}}$

תשובות סופיות

1) א) $\widehat{f}(\omega)=\frac{\sin(\omega a)}{\pi\omega}$ ב) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(ax)}{x}\frac{\sin(bx)}{x}dx=\pi\cdot\min\{a,b\}$

2) הוכחה

3) הוכחה

4) הוכחה

משפט הקונבולוציה

הגדרה: בהינתן שתי פונקציות $f(x),g(x)$ נגדיר את הקונבולוציה ביניהן

$$(f*g)_{(x)}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$ (בהנחה והאינטגרל מתכנס)

משפט הקונבולוציה:

אם $f(x),g(x)\in G$ אז גם $(f*g)_{(x)}\in G$ ו - $F\left\{(f*g)_{(x)}\right\}=2\pi\hat{f}(\omega)\hat{g}(\omega)$

שאלות

1) חשבון את הקונבולוציה $\left(\chi_{[-1,1]}*\chi_{[-1,1]}\right)_{(x)}$ כאשר $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}1 & x\in[-1,1]\\ 0 & else\end{cases}$

רמז: חלקו למקרים

2) חשבון את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $\chi_{[-1,1]}(x)=\begin{cases}e^{-x} & x>0\\ 0 & else\end{cases}$

רמז: חלקו למקרים $x>0$ ו - $x\le 0$

3) מצאו פונקציה $f\in G$ כך ש $\hat{f}(\omega)=\left(\frac{\sin\omega}{\omega}\right)^2$

4) נסמן ב E את מרחב הפונקציות הממשיות הגזירות פעמיים $f(t)$

המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$ וגם $\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt<\infty$.

מצאו פונקציה $g(x)$ כך שלכל $f(t)\in E$ מתקיים השיוויון

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(t)-f''(t)\right]g(x-t)dt=2f(x)$$

5) נגדיר $f(x)=\frac{1}{x^2+4}$ ו - $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. מצאו את הקונבולוציה $(f*g)_{(x)}$

תזכורת: $F\left\{\frac{1}{x^2+a^2}\right\}=\frac{1}{2a}e^{a|\omega|}$ עבור $a>0$

6) א) חשבו התמרת פורייה של $(1+|x|)e^{-|x|}$

ב) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-t|}f(t)\,dt=e^{-|x|}+|x|e^{-|x|}$

7) א) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,1]}(x)$

ב) הוכיחו כי $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(1-\cos x)^2}{x^4}dx=\frac{\pi}{3}$

8) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[1,2]}(x)$

9) חשבו את הקונבולוציה $(f*f)_{(x)}$ כאשר $f(x)=\chi_{[0,2]}(x)$

10) חשבו את הקונבולוציה $\left(\chi_{[0,1]}*\chi_{[1,2]}\right)_{(x)}$

11) חשבו את הקונבולוציה $\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}$ בשתי דרכים שונות:

א) לפי ההגדרה

ב) על ידי שימוש במשפט הקונבולוציה

הערה: תוכלו להשתמש בעובדה ש $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$

12) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)f(x-t)\,dt=e^{\frac{-3(x+1)^2}{2}}$

תשובות סופיות

1) $$\left(\chi_{[-1,1]} * \chi_{[-1,1]}\right)_{(x)} = \begin{cases} 2+x & x\in[-2,0] \\ 2-x & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

2) $$\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} xe^{-x} & x>0 \\ 0 & else \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\pi}{2}(2+x) & x\in[-2,0] \\ \frac{\pi}{2}(2-x) & x\in[0,2] \\ 0 & else \end{cases}$$

4) $$g(x) = e^{-|x|}$$

5) $$\left(f * g\right)_{(x)} = \frac{3}{2}\frac{\pi}{x^2+9}$$

6) א) $$F\left\{\left(1+|x|\right)e^{-|x|}\right\} = \frac{2}{\pi\left(1+\omega^2\right)^2}$$

ב) $$f(x) = e^{-|x|}$$

7) א) $$\left(f * f\right)_{(x)} = \begin{cases} 0 & x>2 \\ 2-x & 1<x<2 \\ x & 0<x<1 \\ 0 & x<0 \end{cases}$$

ב) הוכחה

8) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 3<x<4\\ x-2 & 2<x<3\\ 0 & x<2\end{cases}$$

9) $$(f*f)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>4\\ 4-x & 2<x<4\\ x & 0<x<2\\ 0 & x<0\end{cases}$$

10) $$\left(\chi_{[0,1]}*\chi_{[1,2]}\right)_{(x)}=\begin{cases}0 & x>3\\ 3-x & 2<x<3\\ x-1 & 1<x<2\\ 0 & x<1\end{cases}$$

11) $$\left(e^{-x^2}*e^{-x^2}\right)_{(x)}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

12) $$f(x)=\sqrt[4]{\frac{6}{\pi}}e^{-3\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}$$

תרגילים מסכמים

שאלות

1) א) חשב התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases}\sin(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$

ב) חשב התמרת פורייה של הפונקציה $g(x)=\begin{cases}\cos(x) & |x|\le\pi \\ 0 & else\end{cases}$

ג) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{1-x^2}dx$

ד) חשבו את האינטגרל $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{\left(1-x^2\right)^2}\sin^2(\pi x)dx$

2) א) חשב התמרת פורייה של $f(x)=x\cdot e^{-|x|}$

ב) מצאו את כל הפונקציות $h(y)$ המקיימות $\int_{-\infty}^{\infty}h'(y)e^{-|x-y|}dy=x\cdot e^{-|x|}$

3) יהי $A>0$ קבוע ונגדיר $f(x)=\begin{cases}x & 0\le x\le A \\ 0 & else\end{cases}$.

ידוע כי ישנה פונקציה $g(x)\in G$ כך ש $\hat{g}(\omega)=\hat{f}(\omega)\hat{f}(-\omega)$

מצאו (במפורש) את $g(x)$

4) נניח כי $f\in C^2(-\infty,\infty)$ כך ש $f'(x),x\cdot f'(x),f''(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$

ומתקיים $f''(x)+x\cdot f'(x)+f(x)=0$ לכל x ממשי

א) הוכיחו כי $f(x)\in L^1_{PC}(\mathbb{R})$

ב) חשבו את $\hat{f}(\omega)$ אם נתון ש $\hat{f}(0)=1$

ג) חשבו את $f(x)$

5) תהי $f(x)=\begin{cases} 2 & |x|\le 1 \\ 4 & 1\le |x|\le 2 \\ 0 & else \end{cases}$

א) חשבו את $\hat{f}(\omega)$

ב) חשבו את האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\left[2\sin(2t)-\sin(t)\right]^2}{t^2}dt$

ג) חשבו את $\lim_{M\to\infty}\int_{-M}^{M}\frac{2\sin(2t)-\sin(t)}{\pi t}\cos(t)\,dt$

6) א) חשבו התמרת פורייה של הפונקציה $f(x)=\begin{cases} 1-\frac{x^2}{\pi^2} & |x|\le \pi \\ 0 & else \end{cases}$

ב) חשבו את האינטגרלים

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3 x^3}\right)^2 dx \quad , \quad \int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3 x^3}dx$$

7) נגדיר $\phi(x)=\frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$. הוכיחו כי המערכת $\{\phi(x-n)\}_{n=-\infty}^{n=\infty}$ הינה מערכת אורתונורמלית ב $L^2_{PC}(\mathbb{R})$, כלומר כי $\int_{-\infty}^{\infty}\phi(x-n)\overline{\phi(x-m)}dx=\begin{cases} 1 & n=m \\ 0 & n\ne m \end{cases}$

8) תהי $f\in G$ פונקציה כך ש $f'\in G$ פונקציה רציפה.

מצאו פונקציה $g\in G$ המקיימת את המשוואה $g(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{u-t}g(u)\,du+f'(t)$

9) מצאו פונקציה שהתמרת הפורייה שלה היא $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^2}$

10) פתרו את המשוואה האינטגרלית $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{(x-t)^2+b^2}dt=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$ עבור $a>b>0$

11) נגדיר $f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(\omega-t)\chi_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}(t)e^{i\omega x}dtd\omega$

מצאו ביטוי מפורש (ללא אינטגרלים) עבור $f(x)$

תזכורת: $\chi_{[a,b]}(t)=\begin{cases}1 & t\in[a,b]\\ 0 & else\end{cases}$

12) השתמשו במשפט פלנשראל על מנת לחשב את האינטגרל הבא כאשר $a,b>0$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx$$

13) מצאו התמרת פורייה של $f(x)=e^{-(x^2+2x+5)}$

14) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}$ לכל $a,b>0$ קבועים.

15) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\frac{\sin^2(x)\cos(x)}{1+x^2}dx=\frac{\pi}{8e}\left(1-\frac{1}{e^2}\right)$

16) הוכיחו כי $\int_0^{\infty}\sin^3(x)\cdot xe^{-x}dx=\frac{9}{25}$

תשובות סופיות

1) א) $\hat{f}(\omega)=-i\frac{1}{2\pi}\sin(\pi\omega)\frac{2}{1-\omega^2}$ ב) $\hat{g}(\omega)=\frac{1}{2\pi}\frac{2\omega\sin(\pi\omega)}{1-\omega^2}$

ג) $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)\sin(x)}{1-x^2}dx=\frac{\pi}{2}\sin(1)$ ד) $\int_0^\infty \frac{x^2}{(1-x^2)^2}\sin^2(\pi x)dx=\frac{\pi^2}{2}$

2) א) $\hat{f}(\omega)=-\frac{2i\omega}{\pi(1+\omega^2)^2}$ ב) $h(y)=-e^{-|y|}$

3)
$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\pi}\left(\frac{(A+x)^3}{3}-\frac{(A+x)^2}{2}x\right) & -A<x<0\\ \frac{1}{2\pi}\left(\frac{A^3}{3}-\frac{A^2}{2}x+\frac{x^3}{6}\right) & 0<x<A\\ 0 & else\end{cases}$$

4) א) הוכחה ב) $\hat{f}(\omega)=e^{-\frac{\omega^2}{2}}$ ג) $f(x)=\sqrt{2\pi}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

5) א) $\hat{f}(\omega)=\frac{4\sin(2\omega)-2\sin(\omega)}{\pi\omega}$ ב) $\frac{5\pi}{2}$ ג) $\frac{3\pi}{2}$

6) א) $\hat{f}(\omega)=2\frac{\sin(\pi\omega)-\pi\omega\cos(\pi\omega)}{\pi^3\omega^3}$

ב) $\int_0^\infty \frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}dx=\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{\pi^2}\right)$

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin(\pi x)-\pi x\cos(\pi x)}{\pi^3x^3}\right)^2dx=\frac{1}{15}$$

7) הוכחה

8) $g(t)=f(t)+f'(t)$

9) $f(x)=\begin{cases}\frac{\pi}{2}e^{x}(1-x) & x<0\\ \frac{\pi}{2}e^{-x}(1+x) & x>0\end{cases}$

10) $f(x)=\frac{1}{\pi}\frac{b}{a}\frac{(a-b)x}{\left(x^2+(a-b)^2\right)^2}$

11) $f(x)=4\frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right)}{x^2}$

12) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(a^2+x^2)(b^2+x^2)}dx=\frac{\pi}{a+b}$

13) $\hat{f}(\omega)=\frac{1}{e^4}e^{i\omega}\frac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

14) הוכחה

15) הוכחה

16) הוכחה